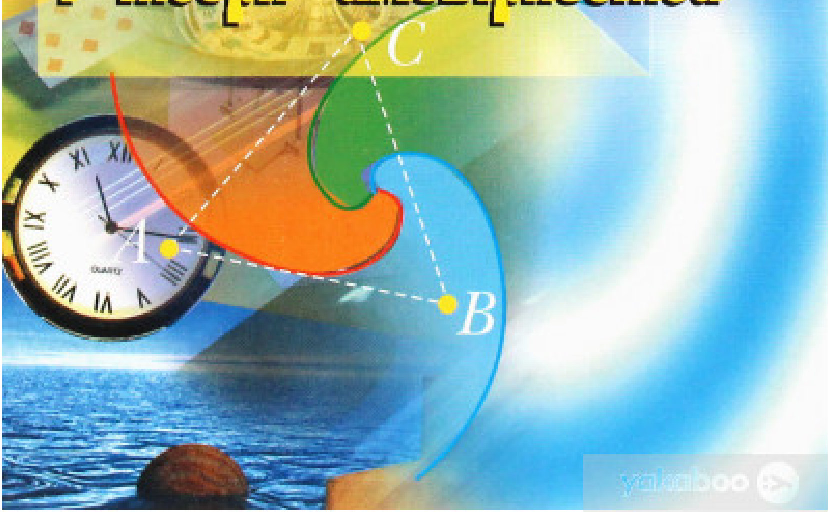
О.Б. РУДИК

# ПОЧАТКИ
# алгебри, аналізу, аналітичної геометрії і теорії ймовірностей




yakaboo

**ББК 22.1я72**

**Р83**

Рецензенти:
професор Київського національного університету ім. Т. Шевченка,
член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук
*М. И. Ядренко;*
старший науковий співробітник Інституту механіки НАН України,
вчитель-методист ЗОШ № 292 м. Києва, кандидат фізико-математичних наук
*Т. Л. Єфімова;*
вчитель-методист гімназії № 178 м. Києва
*Ю. М. Рабінович*

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*
*(лист № 14/18.2-1471 від 12.07.2002 р.)*

**Рудик О. Б.**

Р83 Початки алгебри, аналізу, аналітичної геометрії і теорії ймовірностей: Навч. пос.— Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2005. — 416 с.

**ISBN 966-692-605-9**

У пропонованому посібнику подано математичні основи шкільного курсу алгебри, математичного аналізу, аналітичної геометрії і теорії ймовірностей.

Твердження, вміщені у цій книзі, або є загальноприйнятими аксіомами чи означеннями, або сформульовані та доведені як теореми, наслідки попередніх тверджень. Нескладні доведення окремих теорем не деталізовано, а лише подано схему їхнього доведення, щоб спрямувати читача на активне й самостійне застосування набутих знань. Порядок викладу матеріалу обумовлений сучасними вимогами щодо обгрунтованості міркувань і суттєво відрізняється від традиційно прийнятого.

У цій книзі наведено приклади розв’язування задач, що готують учнів до свідомої роботи над вправами і скеровують на стисле, легке для сприймання записування розв’язання.

Для вчителів та учнів класів з поглибленим вивченням математики, абітурієнтів, викладачів і студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.1я72

*Охороняється законом про авторське право.*
*Жодна частина цього видання не може бути використана чи відтворена*
*в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва.*

ISBN 966-692-605-9

© О. Б. Рудик, 2005
© «Навчальна книга — Богдан», 2005

**О. Б. Рудик**

# Початки алгебри, аналізу, аналітичної геометрії і теорії ймовірностей

## Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА - БОГДАН

# Зміст

# Передмова

Запропоновану книгу задумано передусім як посібник для учнів класів з поглибленим вивченням математики. При її написанні автор керувався певними міркуваннями.

Виклад матеріалу має бути *систематичним і логічно послідовним.* Твердження, подані у посібнику, або загальноприйняті аксіоми чи означення, або сформульовані та доведені як теореми, наслідки попередніх тверджень. Єдиний відхід від цього правила зроблено щодо формального викладу теорії множин і висловлювань (зауваження разом з поясненням, чому зроблено так, подано в самому тексті). Нескладні доведення окремих теорем не деталізовано, а лише подано схему їхнього доведення, щоб спрямувати читача на активне й самостійне застосування набутих знань. Порядок викладу матеріалу обумовлений сучасними вимогами щодо обґрунтованості міркувань і суттєво відрізняється від традиційно прийнятого.

Виклад матеріалу має бути *стислим.* Це полегшує його сприймання і запам'ятовування, допомагає готуватися до іспитів і самостійно працювати. Структура теоретичного курсу має відповідати поширеним формам контролю знань. Кожне запитання подано так, щоб було легко підготуватися до відповіді — написати розгорнутий план викладу протягом 10–15 хв.

При вивченні математики важливо виховувати вміння користуватися мінімальними засобами для досягнення результату. Наприклад, доводити опуклість функції без застосування похідної. Необхідно звертати увагу на розвиток мислення й мовлення, поступово переходячи від "дослівного перекладу" математичних формул до "літературного", в якому наголошується не стільки на тому, що саме треба робити, скільки на тому, навіщо це потрібно.

Опанувати математичну теорію можна лише при постійному розв'язуванні задачі на застосування цієї теорії. У посібнику подано приклади розв'язування задач, що готують до свідомої роботи над вправами і скеровують на стисле, легке для сприймання записування розв'язання. Стислість запису розв'язання задач — не тільки прояв певної математичної культури, а й додатковий час на іспиті чи заліку для пошуку оптимального розв'язання задач і його перевірки.

Посібник не вміщує підбірку задач, бо читач може скористатися, наприклад, такими джерелами:

1. Вибрані питання елементарної математики/ За ред. чл.-кор. АН УРСР А.В.Скорохода. — К.: Вища школа, 1982. — 455 с.

2. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. — К.: Либідь, 1993. — 344 с.

Між розділами й параграфами цього посібника та видань 1–2 існує певна відповідність (див. таблицю).

| Посібник | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 2 | 3 | | 4, 5 | 6, 7 | 9 | 10 | 11 | 8 |
| 2 | | | 4, 5 | 1 | 2,3 | 13–15 | 6,7 | 8–10 | | 7 | 11 | 12 |

Щодо теорії ймовірностей (розділ 15), то варто використати таке видання: Дороговцев А.Я., Сільвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теорія ймовірностей: Зб. задач. — К.: Вища школа, 1976. — 384 с. Розділи 2, 13, 14 і 15 цієї книжки містять означення та твердження, використані в інших розділах, однак їхнє вивчення чинна програма передбачає лише оглядово.

Вимоги до підготовки читача мінімальні, бо базуються лише на чинній програмі з математики для 1–7 класів загальноосвітньої школи. Зокрема, це: практичні навички рахунку (в тому числі усного), спрощення виразів та ін. Для розділу 5 необхідні знання про властивості точок прямої для запровадження числової прямої і властивості подібних фігур для запровадження числа $\pi$. Розділ 6 “Аналітична геометрія” систематизує і поглиблює відповідні знання з геометрії. Розділ 7 потребує знань про теорему Піфагора для виведення основних властивостей тригонометричних функцій. Розділ 11 передбачає опанування знаннями про площу об’єднання трикутників і об’єм об’єднання трикутних пірамід. У розділі 14 використано відомості зі шкільного курсу класичної механіки та електродинаміки. Решта змісту є “самозамкненою”.

Цінність курсу (крім можливості осмислено розв’язувати традиційні математичні задачі) полягає у послідовному викладі математичних основ детерміністичного і ймовірнісного описів світу. Посібник можна використовувати для роботи за навчальною програмою з учнями класів з поглибленим вивченням математики, а з учнями інших класів — для проведення факультативних та індивідуальних занять, роботи гуртків. Посібник буде корисним також для абітурієнтів і студентів вищих навчальних закладів.

# Розділ 1. Множина

## 1.1. Множини та дії з ними

Людині властиво розглядати ту чи іншу сукупність (набір, множину) предметів, споріднених за якою-небудь ознакою, як окремий об'єкт. Наприклад:

- абетка — *сукупність* літер А, Б, В, Г, Ґ, ... , Ю, Я;
- *множина* цифр — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- подарунковий *набір* ласощів;
- повне *зібрання* творів письменника.

Це помітно навіть з того, що всі виділені курсивом іменники вживаються в однині. Поняття *множина, елемент множини, належність до множини* — поняття *фундаментальні*, тобто такі, що не можна визначити через інші поняття. Властивості фундаментальних понять описують за допомогою *аксіом* — тверджень, що приймаються без доведення. Наприклад, *множина складається з елементів, що належать до неї.* Множина повністю визначена, якщо відомі всі її елементи. З іншого боку, кожен елемент множини має бути чітко окресленим, індивідуалізованим. Крім цього, сама множина може входити до складу іншої множини як елемент. Для будь-якого елемента $a$ і для будь-якої множини $A$ завжди можна стверджувати, що елемент $a$ *належить* до множини $A$ (це записують як $a \in A$) або *не належить* до неї ($a \notin A$). Те, що літерами $a$ й $b$ позначено один і той самий елемент, надалі будемо записувати так: $a = b$. Наперед задають *універсальну множину*[1] $U$. Її елементами є всі об'єкти, які розглядаються в даній математичній теорії.

Найчастіше множина задається:

- переліком всіх її різних елементів, записаних через кому, перед першим з яких пишуть ліву фігурну дужку, а після останнього

[1] Необхідність виділення універсальної множини випливає щонайменше з парадоксу теорії множин про неможливість існування множини всіх множин. У цій книжці це питання не розглянуто.

— праву фігурну дужку. Запис $A = \{a, b, c\}$ означає, що множина $A$ складається з елементів $a$, $b$, $c$, що відмінні один від одного. Запис $B = \{d, \{e\}\}$ вказує, що множина $B$ складається з елемента $d$ і множини, яка містить єдиний елемент $e$;

- описом властивостей її елементів, який однозначно визначає належність елемента до множини. Те, що елемент $x$ має властивість $P$, записують як $P(x)$. Для запису множини всіх елементів, що мають властивість $P$, використовують таке позначення: $\{x|P(x)\}$. Аналогічно $\{x \in A|P(x)\}$ — позначення для множини всіх тих елементів множини $A$, які мають властивість $P$. У цих випадках запис множини відкривається лівою фігурною дужкою, далі вказують позначення елемента множини[1], а після вертикальної риски записують перелік властивостей, що визначають належність до даної множини, після чого запис завершується правою фігурною дужкою.

Нехай $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Тоді $\{x \in \mathbb{Z}|\ x^3 - 2x = 0\}$ — множина всіх цілих чисел $x$, для яких $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$, тобто це множина $\{0\}$, що містить лише нуль.

**Означення 1.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Множина $A$ — підмножина множини $B$, якщо будь-який елемент множини $A$ є елементом множини $B$. Будемо записувати це так: $A \subset B$ або $B \supset A$.*

2. *Множина порожня, якщо вона не містить жодного елемента. Таку множину позначають $\varnothing$. Вона є підмножиною будь-якої множини, у тому числі порожньої. Множину, що не є порожньою, називають непорожньою.*

3. *Множини $A$ і $B$ рівні, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. Це записують так: $A = B$ або $B = A$. У даному разі $A$ є підмножиною $B$ і навпаки: $A \subset B \subset A$.*

Наприклад, $\{a\}$=$\{a, a\}$ — рівні множини, що складаються з елемента $a$ (не можна плутати з самим елементом $a$). Множина $\{\varnothing\}$ має єдиний елемент — $\varnothing$. Всі можливі множини є підмножинами універсальної множини.

---
[1]Запис належності до універсальної множини можна не подавати.

**Означення 2.** *Основні операції над множинами:*

$A \cap B$ — *перетин (переріз) множин $A$ і $B$ — множина всіх елементів, що одночасно належать до $A$ і $B$;*

$A \cup B$ — *об'єднання множин $A$ і $B$ — множина всіх елементів, що належать хоча б до однієї з множин $A$ чи $B$;*

$A \backslash B$ — *різниця множин $A$ і $B$ — множина всіх елементів, що належать до $A$ і не належать до $B$;*

$A \triangle B$ — *симетрична різниця множин $A$ і $B$ — множина всіх елементів, кожен з яких належить лише до однієї з множин $A$ чи $B$;*

$\bar{A}$ — *доповнення множини $A$ — множина всіх елементів універсальної множини $U$, що не належать до $A$.*

Дії з непорожніми множинами можна подати за допомогою діаграм Венна[1] (кругів Ейлера[2]) — див. рис. 1.

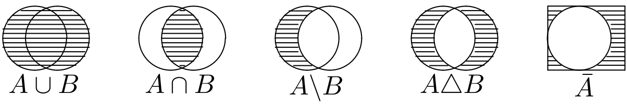


*Рис. 1.* Круг ліворуч — множина $A$, круг праворуч — множина $B$, заштрихована частина — результат дії над множинами. На останній діаграмі круг — множина $A$, прямокутник — універсальна множина. Поміркуйте, як будуть розташовані круги Ейлера, якщо $A \subset B$ або $B \subset A$.

## 1.2. Декартів добуток і відношення

**Означення 3.** *Запровадимо такі поняття:*

[1] Джон Венн (1834–1923) — англійський логік і математик.

[2] Леонард Ейлер (1707–1783) — швейцарський математик. Тривалий час жив і працював у Росії та Пруссії. Відомий численними працями з балістики, навігації, оптики, аналізу — теорії функцій, диференціального, інтегрального та варіаційного числення, диференціальної геометрії, теорії чисел, топології і теорії ймовірностей.

1. *Впорядкованою парою елементів* $a$ *і* $b$ *називають множину* $\{\{a,b\},\{a\}\}$*, в якій елемент* $a$ *вважається першим, а елемент* $b$ *— другим елементом впорядкованої пари. Таку пару позначають як* $(a;b)$.

2. *Декартовим*[1] *добутком непорожніх множин* $A$ *і* $B$*, який позначають як* $A \times B$*, називають множину всіх впорядкованих пар, в яких перший елемент належить до множини* $A$*, а другий — до множини* $B$ *(див. рис. 2). Якщо хоча б одна з множин* $A$ *і* $B$ *порожня, то їхній декартів добуток — порожня множина.*

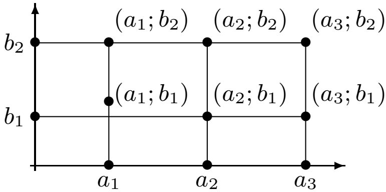



*Рис. 2.* Геометрична інтерпретація впорядкованих пар і декартового добутку множин чисел $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ та $B=\{b_1,b_2\}$.

3. *Легко узагальнити поняття впорядкованої пари до поняття кортежу — впорядкованого набору елементів, а поняття декартового добутку — за наявності 3 і більше співмножників*[2]*, якщо припустити, що:*
$$(x_1;x_2;...;x_{n-1};x_n)=((x_1;x_2;...;x_{n-1});x_n),$$
$$A_1\times\cdots\times A_{n-1}\times A_n=(A_1\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n.$$

4. $A^n=\overbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}^{n\text{ співмножників}}$ *— n-кратний декартів добуток множини* $A$ *самої на себе.*

[1] На честь французького вченого Рене Декарта (1596–1650).

[2] Такий спосіб означення називають рекурентним (з латинської *recurrens* — "той, що повертається"), тобто означенням, за яким певне поняття, що запроваджене для довільного як завгодно великого натурального $n$, визначається через такі самі поняття, котрі запроваджено для менших значень $n$. При цьому для найменшого можливого значення $n$ (інколи ще для кількох наступних за ним значень) поняття запроваджується окремо.

5. *Відношенням з множини $A$ у множину $B$ називають довільну підмножину декартового добутку $A \times B$. Відношення традиційно позначають малою літерою грецької абетки, наприклад, $\varphi$ (потрібно читати "фі"). Якщо $(a;b) \in \varphi$ для елементів $a \in A$ і $b \in B$, то кажуть, що $a$ і $b$ перебувають у відношенні $\varphi$, або відношення $\varphi$ елементу $a$ ставить у відповідність елемент $b$, і позначають як $a \ \varphi \ b$. Якщо ж $(a;b) \notin \varphi$, то це записують як $a \ \bar{\varphi} \ b$ або $a \ \not\varphi \ b$.*

Наприклад, для відношення порядку на множині цілих чисел маємо: $1 < 2$, $7 \nless 2$.

**Зауваження 1.** *$A \times B = B \times A$ для непорожніх множин $A$ і $B$ тоді й лише тоді, коли $A = B$.*

Нехай $A$, $B$ — непорожні множини, $\varphi$ — відношення з $A$ в $B$, $a$ — довільний елемент множини $A$. Умова належності до відношення $\varphi$ з $A$ у $B$ впорядкованих пар $(a;b)$, в яких перший елемент $a \in A$ один і той самий, визначає множину $\{b \in B | \ (a;b) \in \varphi\}$. Перебираючи всі елементи $a$ з множини $A$, отримаємо правило, за яким елементам множини $A$ ставляться у відповідність елементи множини $B$, що перебувають з ними у відношенні $\varphi$. Якщо відношення означують саме як *правило*, то відповідну підмножину декартового добутку $A \times B$ називають *графіком відношення.*

## 1.3. Функція. Обернене відношення

**Означення 4.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Відношення $f$ з непорожньої множини $X$ у непорожню множину $Y$ називають відображенням (функцією), якщо $f$ кожному елементу множини $X$ ставить у відповідність не більше, ніж один, елемент множини $Y$. Скорочено це записують так: $f : X \to Y$.*

2. *Якщо функція $f$ певному елементу $x$ з множини $X$ ставить у відповідність деякий елемент $y$ з $Y$, то $x$ називають аргументом функції $f$, а $y$ — значенням функції $f$ для аргументу $x$ чи образом аргументу $x$ для відображення $f$. Записують це так: $y = f(x)$.*

3. *Область визначення функції* $f : X \to Y$ *— це множина всіх її аргументів. Її позначають так:* $D(f)$ *або* $X_f$.

4. *Область значень функції* $f : X \to Y$ *— це множина* $\{y \in Y |\ y = f(x),\ x \in D(f)\}$. *Її позначають так:* $f(X)$ *або* $Y_f$.

5. *Суперпозицією* $n$ *функцій* $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3$, ... , $f_n : X_n \to X_{n+1}$ *називають функцію* $f : X_1 \to X_{n+1}$, *значення якої потрібно знаходити за таким правилом:* $f(x) = f_n(\cdots f_2(f_1(x))\cdots)$, *тобто потрібно послідовно знаходити значення функції від значення функції. Таку функцію* $f$ *називають також складеною.*

6. *Функцію* $f : X \to Y$ *називають:*

   - *відображенням "на" (сюр'єкцією), якщо* $Y$ *— область значень* $f$*;*
   - *відображенням "в" (ін'єкцією), якщо різним значенням аргументу відповідають різні значення функції та* $X$ *— область визначення;*
   - *взаємно однозначним відображенням (бієкцією), якщо вона є відображенням "на" і "в" (сюр'єкцією та ін'єкцією), тобто встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами* $X$ *та* $Y$.

7. *Якщо область визначення функції* $f$ *складається з кортежів* $(x_1; x_2;\ ... ; x_n)$, *то елементи* $x_1, x_2, ... , x_n$ *також називають аргументами функції* $f$.

8. *Для відношення* $\varphi$ *з множини* $X$ *у множину* $Y$ *відношення з множини* $Y$ *у множину* $X$ *називають оберненим до відношення* $\varphi$ *і позначають* $\varphi^{-1}$, *якщо для довільних* $x \in X$, $y \in Y$ *умови* $x\ \varphi\ y$ *та* $y\ \varphi^{-1} x$ *одночасно справджуються або не справджуються. Для кожної функції (як відношення) існує обернене відношення. Якщо це обернене відношення — функція, то його називають оберненою функцією.*

## 1.4. Предикат і булева функція

**Зауваження 2.** *Вже створено аксіоматичну теорію множин і числення висловлювань*[1] *(і не одну), в якій строго описано логіко-математичну мову — її базові елементи (літери, слова), аксіоми (правила) запису висловлювань і встановлення істинності останніх. Це зроблено у межах окремої математичної дисципліни — математичної логіки, що сформувалась на межі XIX та XX ст., з метою уникнення низки парадоксів, виявлених в основах математики. Вивчення курсу математичної логіки потребує значного рівня абстракції і не входить до даної книжки. Це суперечить проголошеному логічно-послідовному підходу, але обумовлене складністю відповідного матеріалу. З огляду на сказане вище поняття "висловлювання" й "істинність висловлювання" тут чітко не означатимемо, а користуватимемося інтуїтивним розумінням цих понять. Інакше кажучи, ми підемо шляхом, який читач вже пройшов у дитинстві щодо вивчення рідної мови: спочатку просте сприйняття звуків і слів, ознайомлення з окремими поняттями, порядком слів у реченні та узгодженням граматичних форм, використання мови на рівні вільного спілкування. І лише потім настає черга вивчити абетку та правила граматики цієї ж мови. Зауважимо, що для всіх висловлювань (тверджень), поданих нижче, існує несуперечлива система аксіом, для якої результати встановлення істинності висловлювань ті самі, що й на підставі інтуїтивного підходу.*

**Означення 5.** *$N$-місним предикатом називають функцію з декартового добутку $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$ у множину висловлювань щодо аргументів $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ... , $a_N \in A_N$, де $A_1$, $A_2$, ... , $A_N$ — деякі множини.*

*Область істинності предиката $P$ — множина всіх значень аргументу $a \in A$, для яких справджується (є істинним) висловлювання $P(a)$. За домовленістю на порожній множині справджується будь-яке висловлювання щодо елементів множини.*

У літературі можна натрапити на означення $N$-місного предиката як підмножини $N$-кратного декартового добутку. Інакше кажучи,

[1] Висловлювання ми розумітимемо як твердження, що є або істинним, або хибним.

замість предиката в розумінні поданого означення пропонують розглядати область його істинності.

У подальшому викладі використано такі позначення:
$\forall$ — квантор загальності ($\forall\ x$ потрібно читати "для довільного $x$");
$\exists$ — квантор існування ($\exists\ x$ потрібно читати "існує $x$");
$\exists!$ — єдиність існування ($\exists!\ x$ потрібно читати "існує єдине $x$").

Квантор стосується всіх елементів, записаних праворуч від нього через кому. Наприклад, у висловлюваннях:

$\forall\ x \quad x^2 \neq -1$ — для довільного $x$ $x^2$ відмінне від $-1$;

$\forall\ x, y, z \in U \quad x + y + z = 1$ — для довільних елементів $x$, $y$, $z$ множини $U$ справджується така рівність: $x + y + z = 1$;

$\exists\ x \quad (x-2)(x-1) = 0$ — існує таке $x$, що добуток чисел $(x-2)$ і $(x-1)$ дорівнює 0;

$\exists\ x, y, z \in U \quad xyz = 1$ — існують елементи $x$, $y$, $z$ множини $U$, добуток яких дорівнює 1;

$\exists!\ x \quad x - 2 = 0$ — існує таке єдине $x$, що $x - 2 = 0$.

**Означення 6.** *Булева*[1] *функція — функція, що має скінченну*[2] *кількість аргументів, які разом із функцією набувають значень з деякої двоелементної множини.*

**Зауваження 3.** *За множину значень булевих функцій найчастіше вибирають множину значень результату встановлення істинності висловлювань {"істинність", "хибність"}, що й ми робитимемо надалі. У даному разі аргументи булевої функції розглядають як результат встановлення істинності деяких висловлювань, а значення самої булевої функції — як результат встановлення істинності нового висловлювання, створеного за допомогою даної булевої функції.*

Після строгого означення цілих чисел 0 та 1 (це ми зробимо далі) за множину значень булевих функцій можна взяти множину чисел

[1] Джордж Буль (1815–1864) — англійський математик, засновник математичної логіки.

[2] Строге означення кількості елементів множини подано далі.

$\{0, 1\}$. Обидві множини при викладі теорії булевих функцій ототожнюють, трактуючи 0 як "хибність", а 1 — як "істинність". Мета такого ототожнення — використання переваг кожного подання множини значень булевих функцій при викладі окремих питань. Однак ніщо не заважає нам вже зараз використовувати *символи* 0 та 1 для позначення відповідних елементів множини {"хибність", "істинність"}.

**Означення 7.** *Нехай $A$ і $B$ — елементи множини значень булевих функцій {"хибність", "істинність"}. Запровадимо найпростіші булеві функції та їхні позначення:*

$\neg A$ — *заперечення $A$ (пишуть також $\bar{A}$, потрібно читати "не $A$") — істинне тоді й лише тоді, коли хибне $A$.*

$A \wedge B$ — *кон'юнкція $A$ і $B$ (пишуть також $A \& B$, потрібно читати "$A$ і $B$") — справджується тоді й лише тоді, коли одночасно справджуються $A$ і $B$.*

$A \vee B$ — *диз'юнкція $A$ і $B$ (потрібно читати "$A$ або $B$") — справджується тоді й лише тоді, коли справджується хоча б один з аргументів $A$ чи $B$.*

$A \Rightarrow B$ — *імплікація "з $A$ випливає $B$" — справджується тоді й лише тоді, коли справджується хоча б один з елементів $\neg A$ чи $B$.*

$A \Leftrightarrow B$ — *еквівалентність "$A$ еквівалентне $B$" (пишуть також $A \equiv B$) — справджується тоді й лише тоді, коли $A$ і $B$ одночасно справджуються або не справджуються.*

$A | B$ — *штрих Шеффера між $A$ і $B$ — справджується тоді й лише тоді, коли не справджується хоча б один з аргументів $A$ чи $B$.*

$A \downarrow B$ — *стрілка Пірса[1] між $A$ і $B$ — справджується тоді й лише тоді, коли одночасно не справджуються ні $A$, ні $B$.*

Булеві функції можна задати за допомогою таблиць значень булевих функцій. Такі таблиці ще називають *таблицями істинності*

[1] Чарльз Сандерс Пірс (1839–1914) — американський учений.

булевих функцій. У перших стовпчиках таких таблиць (ліворуч) записано всі можливі набори значень аргументів, а в наступних стовпчиках (праворуч) — відповідні значення булевих функцій. Переконайтеся в еквівалентності формулювань означення 7 і таблиці 1.

*Таблиця 1*

Таблиця значень найпростіших булевих функцій

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ | $A \mid B$ | $A \downarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Використовуючи круглі дужки й описані булеві функції, можна задати нові булеві функції, у тому числі й від більшої кількості аргументів. Дії у дужках потрібно виконувати перш за все. Щодо виразів, які не містять дужок, домовимося спочатку знаходити заперечення, потім у вказаному порядку — кон'юнкцію, диз'юнкцію, імплікацію й еквівалентність.

Перебравши всі можливі значення $A$, $B$ і $C$, легко пересвідчитися в істинності таких еквівалентностей:

- *закон подвійного заперечення:* $\neg(\neg A) \equiv A$;
- *закони ідемпотентності:* $A \wedge A \equiv A, \quad A \vee A \equiv A$;
- *закон виключення третього:* $A \vee \neg A \equiv 1$;
- *закон суперечності:* $A \wedge \neg A \equiv 0$;
- $A \wedge 0 \equiv 0, \qquad A \wedge 1 \equiv A, \qquad A \vee 0 \equiv A, \qquad A \vee 1 \equiv 1$;
- *перставна властивість кон'юнкції:* $A \wedge B \equiv B \wedge A$;
- *перставна властивість диз'юнкції:* $A \vee B \equiv B \vee A$;
- *сполучна властивість кон'юнкції:* $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$;
- *сполучна властивість диз'юнкції:* $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$;
- *розподільна властивість кон'юнкції:* $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
- *розподільна властивість диз'юнкції:* $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
- *закони Морґана:*[1] $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.

[1] Морґан де Оґастес (Авґустус) (1806–1871) — шотландський математик і логік.

Означимо кон'юнкцію і диз'юнкцію будь-якої скінченної кількості аргументів як булеву функцію, що справджується тоді й лише тоді, коли справджуються відповідно всі чи хоча б один з аргументів. Це дає змогу сформулювати закони Морґана для довільної скінченної кількості аргументів:

- *заперечення диз'юнкції скінченної кількості аргументів еквівалентне кон'юнкції заперечень цих аргументів;*
- *заперечення кон'юнкції скінченної кількості аргументів еквівалентне диз'юнкції заперечень цих аргументів.*

Якщо на місце аргументів булевих функцій поставити не результати встановлення істинності висловлювань, а самі висловлювання, то отриманий вираз потрібно трактувати як висловлювання. Істинність такого висловлювання встановлюється за правилом встановлення істинності аргументів булевої функції та за правилом обчислення самої булевої функції. Наприклад,
висловлювання $((x-1)(x-2)=0 \wedge x=1) \equiv (x=1)$ — істинне;
висловлювання $((x-1)(x-2)=0 \vee x=1) \equiv (x=1)$ — хибне.

Для зручності кон'юнкцію чи диз'юнкцію кількох висловлювань позначають відповідно лівою фігурною ($\{$) чи квадратною дужкою ($[$), записуючи ці висловлювання у стовпчик праворуч від дужки. Наприклад,

$$(x=a \wedge y=b \wedge z=c) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=c \end{array}\right., \quad (x=a \vee y=b \vee z=c) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=c \end{array}\right..$$

Запишемо означення дій над множинами й означення декартового добутку за допомогою запроваджених булевих функцій. Нехай $A$, $B$ — деякі множини. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}, \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}, \\ A \backslash B &= \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}, \\ A \triangle B &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}, \\ \bar{A} &= \{x \mid x \notin A\}, \\ A \times B &= \{(a; b) \mid a \in A \wedge b \in B\}. \end{aligned}$$

## 1.5. Нормальна форма булевої функції

**Означення 8.** *Диз'юнктивна нормальна форма булевої функції $f(A_1, \ldots, A_N)$ — подання (запис) її у такому вигляді: $\bigvee\limits_{j=1}^{J}\left(\bigwedge\limits_{n=1}^{N} C_{jn}\right)$, де $C_{jn} = A_n$ або $C_{jn} = \neg A_n$. Запис $\bigwedge\limits_{n=1}^{N}$ вжито для кон'юнкції $N$ аргументів (n набуває значень від 1 до N), а запис $\bigvee\limits_{j=1}^{J}$ — для диз'юнкції $J$ аргументів (j набуває значень від 1 до J).*

*Кон'юнктивна нормальна форма булевої функції $f(A_1, \ldots, A_N)$ — подання (запис) її у такому вигляді: $\bigwedge\limits_{j=1}^{J}\left(\bigvee\limits_{n=1}^{N} C_{jn}\right)$, де $C_{jn} = A_n$ або $C_{jn} = \neg A_n$.*

**Теорема 1.** *Для будь-якої булевої функції $f(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ існують її нормальні диз'юнктивна та кон'юнктивна форми.*

**Доведення.** Розглянемо всі можливі булеві функції такого вигляду:

$$B = \bigwedge_{n=1}^{N} B_n, \tag{1}$$

де $B_n = A_n$ або $B_n = \neg A_n$, $n$=1, 2, ... , $N$. Нормальну диз'юнктивну форму булевої функції $f(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ одержимо як диз'юнкцію всіх булевих функцій (1), при справдженні яких одночасно справджується $f$. Фактично ми знаходимо всі можливі набори значень аргументів, для яких справджується $f$. Нормальну кон'юнктивну форму булевої функції можна отримати запереченням нормальної диз'юнктивної форми цієї булевої функції, використовуючи закони Морґана й тотожність $\neg(\neg A)=A$.

**Зауваження 4.** *За таблицею значень булевої функції легко побудувати її нормальну диз'юнктивну форму. Достатньо виділити ті значення аргументів, для яких функція справджується, і кожен такий рядок записати у вигляді кон'юнкції аргументів, якщо для даного набору вони справджуються, або їх заперечень, якщо для даного набору вони не справджуються. Шукана форма — це диз'юнкція всіх таких кон'юнкцій.*

*Таблиця 2*

Нормальні диз'юнктивні форми найпростіших булевих функцій

| Функція | Нормальна диз'юнктивна форма |
|---|---|
| $A \wedge B$ | $(A \wedge B)$ |
| $A \vee B$ | $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ |
| $A \Rightarrow B$ | $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)$ |
| $A \Leftrightarrow B$ | $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ |
| $A \mid B$ | $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ |
| $A \downarrow B$ | $(\neg A \wedge \neg B)$ |

**Наслідок 1.** *Будь-яку булеву функцію можна означити, використавши лише одну функцію — штрих Шеффера чи стрілку Пірса.*

**Доведення.** Розглянувши всі можливі значення $A$ та $B$ з множини значень булевих функцій, легко пересвідчитися в одночасній істинності чи хибності членів кожної трійки тверджень:

- $\neg A$, $A|A$, $A \downarrow A$;
- $A \vee B$, $(A|A)|(B|B)$, $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$;
- $A \wedge B$, $(A|B)|(A|B)$, $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$.

Такий аналіз подано таблицями 3–5 значень булевих функцій.

*Таблиця 3*

Доведення еквівалентності булевих функцій $\neg A$, $A|A$ і $A \downarrow A$

| $A$ | $\neg A$ | $A \mid A$ | $A \downarrow A$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |

*Таблиця 4*

Доведення еквівалентності булевих функцій
$A \vee B$, $(A|A)|(B|B)$ і $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $A \mid A$ | $B \mid B$ | $(A \mid A) \mid (B \mid B)$ | $(A{\downarrow}B)$ | $(A{\downarrow}B){\downarrow}(A{\downarrow}B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

*Таблиця 5*

Доведення еквівалентності булевих функцій
$A \wedge B$, $(A|B)|(A|B)$ і $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A\|B$ | $(A\|B)\|(A\|B)$ | $A \downarrow A$ | $B \downarrow B$ | $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Таким чином, в нормальній диз'юнктивній формі булевої функції $\neg$, $\wedge$ та $\vee$ можна виразити через штрих Шеффера чи стрілку Пірса.

## 1.6. Відношення на множині

**Означення 9.** *Відношення на множині $A$ — відношення з множини $A$ у множину $A$. Відношення $\varphi$ на непорожній множині $A$:*

- *рефлексивне, якщо* $\forall\ a \in A \quad a\ \varphi\ a$;
- *симетричне, якщо* $\forall\ a, b \in A \quad a\ \varphi\ b \Rightarrow b\ \varphi\ a$;
- *антисиметричне, якщо* $\forall\ a, b \in A \quad a\ \varphi\ b \Rightarrow b\ \not\varphi\ a$;
- *транзитивне, якщо* $\forall\ a, b, c \in A \quad (a\ \varphi\ b \wedge b\ \varphi\ c) \Rightarrow a\ \varphi\ c$;
- *відношення еквівалентності, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне;*
- *відношення порядку, якщо воно антисиметричне і транзитивне.*

Наприклад, відношення рівності $=$ на множинах натуральних, цілих та раціональних чисел — рефлексивне, симетричне і транзитивне, а відношення порядку (менше $<$ чи більше $>$) — антисиметричне і транзитивне на цих множинах. Відношення еквівалентності часто позначають так: $\sim$.

**Означення 10.** *Рівність — висловлювання, що пов'язує два об'єкти $a_1$ і $a_2$ знаком рівності $=$. Так звані аксіоми рівності регулюють використання відношення рівності в математичних доведеннях.*

*Ці аксіоми стверджують рефлексивність відношення рівності та можливість заміни рівного рівним*[1].

*Інколи кілька рівностей записують разом* ($a = b = c$), *трактуючи такий запис як кон'юнкцію (одночасне справдження) рівностей.*

*Рівняння — запис у вигляді рівності задачі про пошук всіх тих аргументів, для яких величини двох даних функцій (правої та лівої частини рівняння) рівні. Аргументи, від яких залежать ці функції, називають невідомими або змінними. Значення невідомих, для яких відповідні значення функцій рівні, називають розв'язками (коренями) рівняння. Про такі значення кажуть, що вони задовольняють дане рівняння.*

**Означення 11.** *Нерівність — висловлювання, що пов'язує два об'єкти* $a$ *і* $b$ *одним з таких знаків відношення* $<$ *(менше),* $>$ *(більше),* $\leq$ *(не перевищує),* $\geq$ *(не менше),* $\neq$ *(не дорівнює), тобто* $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$, $a \neq b$. *Інколи кілька нерівностей записують одночасно* ($a < b < c$), *трактуючи такий запис як кон'юнкцію (одночасне справдження) нерівностей.*

*Нерівністю називають також запис у вигляді нерівності задачі про пошук всіх тих аргументів, для яких величини двох даних функцій (правої та лівої частин нерівності) перебувають у відповідному (до знака нерівності) відношенні. Аргументи, від яких залежать ці функції, називають невідомими або змінними. Значення невідомих, для яких справджується нерівність, називають розв'язками нерівності. Про такі значення кажуть, що вони задовольняють дану нерівність.*

**Означення 12.** *Елементи, що перебувають один з одним у відношенні еквівалентності, називають еквівалентними.*

*Класом еквівалентності щодо деякого відношення еквівалентності* $\sim$ *на множині* $A$ *означують непорожню підмножину* $A$, *елементи якої еквівалентні між собою відносно* $\sim$. *Множину всіх кла-*

---

[1] Символічний запис аксіом рівності у теорії висловлювань має такий вигляд: $x = x$; $(x = y \wedge \varphi(y/v)) \Rightarrow \varphi(x/v)$; $(x = y \wedge t(y/v)) \Rightarrow t(x/v)$, де $\varphi$ — довільний вираз для запису висловлювань (так звана формула); $t$ — вираз для позначення об'єктів (так званий терм); $x$, $y$, $v$ — змінні, що мають одну й ту саму область зміни. Вирази вигляду $\varphi(x/v)$ і $t(x/v)$ позначають результат заміни всіх входжень змінної $v$ у формулі $\varphi$ чи термі $t$.

*сів еквівалентності щодо відношення $\sim$ на множині $A$ позначають через $A/\sim$.*

Наприклад, нехай цілі числа $n_1$ і $n_2$ еквівалентні, якщо їхня різниця — парне число. Легко пересвідчитися, що вказане відношення є відношенням еквівалентності на множині цілих чисел, а множини парних і непарних чисел — класи еквівалентності.

## 1.7. Парадокс Кондорсе

Відношення порядку більшість людей пов'язує з упорядкуванням множин чисел. Однак це поняття природно виникає, коли виборець аналізує можливі кандидатури на виборах чи альтернативні пропозиції на референдумі. Вибори — це спроба знайти таке відношення порядку, що відображає ставлення суспільства загалом до запропонованих варіантів. Вкажемо на парадокс Кондорсе[1] — приклад ставлення трьох виборців $A$, $B$ і $C$ до трьох пропозицій $a$, $b$ та $c$, коли:

- таке "усереднене" впорядкування прихильностей виборців зробити неможливо, якщо запропонувати одразу три пропозиції на вибір;
- при внесенні до бюлетенів двох пропозицій у результаті може перемогти будь-яка з трьох залежно від того, які пропозиції голосуються.

Нехай для виборця $A$ найпривабливішою є пропозиція $a$, а найнепривабливішою — $c$. Інакше кажучи:

- якщо на голосування внесено всі три пропозиції або пари $(a; b)$ чи $(a; c)$, то $A$ голосує за $a$;
- якщо на голосування винесено пару $(b; c)$, то $A$ голосує за $b$.

Таку поведінку природно назвати логічно послідовною (раціональною) і зручно записати таким чином:

$$A : a \succ b \succ c.$$

Щодо поведінки виборців $B$ і $C$, то припустимо, що:

[1] Маркіз Марі Жан Антуан Кондорсé (1743–1794) — французький філософ, математик, соціолог і політичний діяч.

$$B : b \succ c \succ a, \qquad C : c \succ a \succ b.$$

При голосуванні пари пропозицій $(a; b)$ більшість — 2/3 виборців — проголосують за пропозицію $a$, пари $(b, c)$ — за пропозицію $b$, пари $(c, a)$ — за пропозицію $c$. Інакше кажучи, при логічно несуперечливій поведінці окремого виборця неможливо вести мову про раціональну поведінку суспільства загалом у результаті таких демократично проведених виборів. Застерігаємо, що така ситуація можлива лише за умови, що альтернатив більше, ніж дві, а кількість прибічників однієї пропозиції проти іншої приблизно рівна для всіх можливих пар пропозицій.

## 1.8. Сюжетні задачі логічного характеру

Роз'язки сюжетних задач логічного характеру можна отримати як послідовність кроків-імплікацій з умови і вже одержаних висновків. В умові та розв'язанні таких задач неявно використовується поняття булевої функції і відношення порядку. *Перелік персонажів у простому реченні умови означає, що вони різні.*

**Задача 1.** *За квадратним столом сидять 4 студентів. Філолог сидить навпроти Кирила, поруч з істориком. Біолог сидить поруч з Віталієм. Сусіди Шандора — Євген і хімік*[1]*. Хто сидить навпроти історика?*

**Розв'язання.** Занумеруємо стільці в порядку обходу столу. Не обмежуючи загальності міркувань, вважатимемо, що на стільці 1 сидить філолог, на стільці 2 — історик, на стільці 3 — Кирило, який може бути біологом або хіміком. Таким чином:

- якщо Кирило — хімік, то біолог сидить на стільці 4, а філолога звати Віталій (він сидить поруч з біологом) і Євген (він сидить навпроти хіміка) одночасно. Отримана суперечність з умовою задачі засвідчує хибність припущення про те, що Кирило — хімік;

- якщо Кирило — біолог, то хімік сидить на стільці 4, історика звати Євген (він сидить навпроти хіміка), філолога — Шандор

[1] Отже, Євген і хімік сидять один навпроти одного.

(сусід Євгена й хіміка). Отже, хіміка, який сидить навпроти історика, звати Віталій.

**Відповідь.** Хімік Віталій сидить навпроти історика.

Розв'язання задачі на встановлення характеристик персонажів унаочнюється заповненням відповідної таблиці.

1. Створюємо прямокутну таблицю, перший стовпчик якої містить всі імена, прізвища тощо персонажів задачі, а перший рядок — всі можливі їхні характеристики, про які йдеться в умові задачі.

2. Заповнюємо решту клітин таблиці знаками $+$ чи $-$ відповідно до того, чи має персонаж, якого ми розглядаємо, потрібну характеристику чи ні. Для того, щоб таблиця відтворювала перебіг думки, а не тільки результат розв'язання, будемо знизу праворуч від знака записувати номер кроку логічних міркувань. При цьому нульовий крок — це безпосередній (очевидний) наслідок простого речення умови.

3. Якщо певні характеристики несумісні, то після появи в таблиці $+$ можна одразу ж поставити $-$ в одному з ним рядку в тих стовпчиках, які містять несумісні з даною характеристики.

4. Висновки можна робити й на основі того, що за умовою число носіїв певних характеристик відоме.

5. Якщо ми не можемо зробити певний висновок про деякі характеристики персонажів, але можемо зробити висновок про їхню одночасну сумісність чи несумісність, то будемо заповнювати клітинки таблиці знаками $\pm$ і $\mp$, де враховуються одночасно тільки верхні або тільки нижні знаки. Це доцільно робити для того, щоб в одній таблиці подати різні можливі варіанти розв'язання задачі.

Таблицю потрібно *повністю* заповнити, щоб показати сумісність (несумісність) всіх тверджень умови задачі. Як приклад див. таблицю 6 — подання розв'язання такої задачі.

**Задача 2.** *Серед офіцерів A, B, C, D, E, F 3 полковники, 2 майори та 1 капітан. Відомо, що A першим вітає*[1] *B; D і E — в одному званні; C та F — в одному роді військ. Полковник, майор і D — танкісти, B та капітан — артилеристи. Один з цих шести офіцерів — зв'язківець. Хто саме? Яке військове звання він має?*

**Розв'язання**

1. Артилеристів є 2, один з яких — $B$. Отже, $C$ і $F$ не артилеристи, а танкісти.

2. Один з них — полковник, а інший — майор.

3. Згідно з умовою, $D$ і $E$ мають одне звання. Один з офіцерів $C$ і $F$ — полковник, а інший — майор. $A$ першим вітає $B$. Отже, $A$ — капітан-артилерист.

4. Таким чином, $E$ — зв'язківець.

5. $E$ і $D$ — полковники (якби вони були майорами, то майорів було б не 2, а 3, що суперечить умові).

6. $B$ — майор, бо, крім нього, лише один з офіцерів $C$ і $F$ є майором.

**Відповідь.** Зв'язківець — полковник $E$.

*Таблиця 6*

Розв'язання задачі 2

| | Звання | | | Рід війська | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | полковник | майор | капітан | танкіст | артилерист | зв'язківець |
| $A$ | $-_0$ | $-_3$ | $+_3$ | $-_3$ | $+_3$ | $-_3$ |
| $B$ | $-_5$ | $+_6$ | $-_0$ | $-_0$ | $+_0$ | $-_0$ |
| $C$ | $\mp_2$ | $\pm_2$ | $-_2$ | $+_1$ | $-_1$ | $-_0$ |
| $D$ | $+_5$ | $-_5$ | $-_0$ | $+_0$ | $-_0$ | $-_0$ |
| $E$ | $+_5$ | $-_5$ | $-_0$ | $-_1$ | $-_3$ | $+_4$ |
| $F$ | $\pm_2$ | $\mp_2$ | $-_2$ | $+_1$ | $-_1$ | $-_0$ |

[1] Інакше кажучи, $A$ має нижче звання, ніж $B$: капітан першим вітає майора і полковника, а майор першим вітає полковника.

# Розділ 2. Натуральні, цілі та раціональні числа

## 2.1. Натуральний ряд

**Означення 13.** *Непорожню множину $\mathbb{N}$ називають множиною чи рядом натуральних чисел, а її елементи — натуральними числами, якщо для неї справджуються подані далі п'ять аксіом Пеано*[1].

**Аксіома 1.** *Множина $\mathbb{N}$ містить елемент, який називають одиницею і позначають* 1.

**Аксіома 2.** *Для довільного елемента $n$ з $\mathbb{N}$ існує*[2] *елемент $n^+$ з $\mathbb{N}$, який називають наступним*[3] *за $n$.*

**Аксіома 3.** *Одиниця не є наступним елементом жодного з елементів $\mathbb{N}$.*

**Аксіома 4.** *Якщо для довільних двох елементів $\mathbb{N}$ відповідні їм наступні елементи збігаються, то самі ці елементи рівні.*

**Аксіома 5.** *Якщо множина $M$ містить одиницю ряду натуральних чисел і для кожного натурального числа множини $M$ наступне для нього також належить до $M$, то ряд натуральних чисел $\mathbb{N}$ — підмножина $M$.*

Запишемо ці аксіоми за допомогою символів для запису дій з висловлюваннями і множинами:

1. $1 \in \mathbb{N}$.

---

[1] Джузеппе Пеано (1858–1932) — італійський математик, якому, крім формулювання аксіом натуральних чисел, належать загальна теорема про існування розв'язку диференціального рівняння, результати з обґрунтування геометрії. Вперше побудував неперервну криву, що заповнює квадрат.

[2] Інакше кажучи, задано функцію з $\mathbb{N}$ у $\mathbb{N}$.

[3] Наступне за 1 натуральне число назвемо "два" і позначимо 2, наступне за 2 натуральне число назвемо "три" і позначимо 3 і т. ін. Дана аксіома вказує на очевидний зв'язок між множиною натуральних чисел та лічбою.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, n^+ \in \mathbb{N}$.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n^+ \neq 1$.

4. $(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge m^+ = n^+) \Rightarrow m = n$.

5. $(1 \in M \wedge (\forall\, n \in M \cap \mathbb{N} \;\; n^+ \in M)) \Rightarrow \mathbb{N} \subset M$.

Зміст 5-ої аксіоми Пеано полягає у тому, що всі натуральні числа можна отримати з одиниці переходом до наступного натурального числа[1].

## 2.2. Додавання і множення

**Означення 14.** *На множині натуральних чисел означимо дію додавання $+$, що парі чисел (доданкам) ставить у відповідність третє число (суму) за такими правилами:*

$$j + 1 = j^+; \qquad j + (k+1) = (j+k) + 1.$$

З даного означення та аксіом Пеано випливають такі *властивості додавання*:

- асоціативність (сполучний закон): $(j+k)+l = j+(k+l)$. При цьому сума кількох доданків не залежить від порядку знаходження сум двох доданків;
- комутативність (переставний закон): $j+k = k+j$. При цьому сума двох доданків не залежить від того, що до чого додаємо;
- якщо рівні суми мають рівні перші доданки, то й другі доданки в них також рівні: $j+k = j+l \;\Rightarrow\; k = l$.

**Означення 15.** *На множині натуральних чисел означимо дію множення $(\cdot)$, що парі чисел (співмножникам) ставить у відповідність третє число (добуток) за такими правилами:*

$$j \cdot 1 = j, \qquad j \cdot (k+1) = j \cdot k + j.$$

[1]Розглянемо множину $\mathbb{N}'$ натуральних чисел, що містить 1 і разом з кожним своїм елементом містить наступний за ним елемент. Очевидно, що $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. З іншого боку, припустивши у твердженні аксіоми 5, що $M = \mathbb{N}'$, отримаємо: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}'$. Отже, $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$.

З поданого означення та аксіом Пеано випливають такі властивості множення:

- $(j \cdot k) \cdot l = j \cdot (k \cdot l)$ — асоціативність;
- $j \cdot k = k \cdot j$ — комутативність;
- $j \cdot (k + l) = j \cdot k + j \cdot l$ — дистрибутивність (розподільний закон);
- $j \cdot k = j \cdot l \Rightarrow k = l$ — якщо рівні добутки мають рівні перші множники, то й другі співмножники в них також рівні.

Замість $j \cdot k$ пишуть скорочено: $jk$. Такої форми запису ми будемо дотримуватися й надалі. Інколи, найчастіше при перенесенні формул у новий рядок, використовують символ $\times$ замість $\cdot$. Насамперед виконують дії у дужках, а множення — перед додаванням.

## 2.3. Відношення порядку

**Означення 16.** *Натуральне число j більше, ніж натуральне число k, якщо існує таке натуральне число l, що $j = k + l$. В даному разі також кажуть, що k менше, ніж j. Самі твердження записують відповідно в такому вигляді: $j > k$ та $k < j$.*

Відношення порядку має такі властивості:

- для довільних двох натуральних чисел справджується одне й лише одне з тверджень: або перше більше, ніж друге, або друге більше, ніж перше, або вони рівні між собою:

$$\forall\, j, k \in \mathbb{N} \quad (j > k \ \vee \ k > j \ \vee \ j = k);$$

- транзитивність: $(j > k \wedge k > l) \Rightarrow j > l$ — якщо одне число більше, ніж друге, а друге більше, ніж третє, то перше число більше, ніж третє;
- $j > k \Rightarrow j + l > k + l$ — до обох частин нерівності можна додавати одне й те саме число зі збереженням змісту нерівності;
- $j > k \Rightarrow j \cdot l > k \cdot l$ — обидві частини нерівності можна множити на одне й те саме натуральне число зі збереженням змісту нерівності.

Легко сформулювати властивості, аналогічні до трьох останніх, для відношення порядку "менше", здійснивши суто формальну заміну $>$ на $<$.

**Означення 17.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *$n$ — найменший елемент множини $M$ для відношення порядку $<$, якщо* $\forall\ m \in M \backslash \{n\} \quad n < m$. *Такий елемент, якщо він існує, позначають так:* $\min M$ *або* $\min\limits_{m \in M} m$;

2. *$n$ — найбільший елемент множини $M$ для відношення порядку $<$, якщо* $\forall\ m \in M \backslash \{n\} \quad m < n$. *Такий елемент, якщо він існує, позначають так:* $\max M$ *або* $\max\limits_{m \in M} m$.

**Зауваження 5.** *Справджуються такі твердження:*

1. *Для того, щоб знайти найменший елемент непорожньої підмножини натурального ряду, достатньо розглянути довільний елемент $n$ цієї підмножини та перевірити належність до підмножини всіх натуральних чисел, що послідовно утворюються з 1 шляхом додавання 1. Перше з них, що не перевищує $n$, і буде шуканим найменшим.*

2. *Найбільше натуральне число не існує (див. аксіому 2).*

3. *Якщо для підмножини $A$ натурального ряду існує таке натуральне число, що більше, ніж будь-який елемент $A$, то існує найбільший елемент $A$. Таким чином:*

$$\begin{cases} A \subset \mathbb{N} \\ \exists\ n \in \mathbb{N} \quad \forall\ a \in A \quad a < n \end{cases} \Rightarrow\ \exists\ \bar{a} \in A \quad \forall\ a \in A \backslash \{\bar{a}\} \quad a < \bar{a}.$$

Перше твердження випливає з п'ятої аксіоми Пеано, друге — з другої аксіоми Пеано. Доведемо третє твердження. Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементу $a \in A$ елемент $b(a) \in \mathbb{N}$, що отримують з 1 такою самою кількістю додавань 1 (переходом до наступного натурального числа), скількома $n$ отримують з $a$ такими ж переходами до наступного натурального числа. Серед таких елементів $b(a)$ виберемо найменший елемент $b(\bar{a})$. Йому відповідає $\bar{a}$ — найбільший елемент множини $A$.

## 2.4. Метод математичної індукції

На 5-ій аксіомі Пеано ґрунтується *метод математичної індукції*, тобто метод доведення тверджень типу "всі натуральні $n$ мають властивість $P(n)$". Він полягає у тому, що достатньо здійснити такі кроки:

1. Перевірити істинність $P(1)$ (*база індукції*).

2. Припустивши істинність $P(n)$ для натурального $n$ (*припущення індукції*), довести істинність $P(n+1)$ (*крок індукції*).

3. На підставі 5-ої аксіоми Пеано зробити висновок про властивість $P(n)$ для довільного натурального $n$.

**Задача 3.** *Довести, що на площині $n$ прямих, серед яких жодні три не перетинаються в одній точці, а жодні дві не паралельні, поділяють площину на $1+\frac{1}{2}n(n+1)$ частин*[1].

**Доведення** (методом математичної індукції):

1. Пряма ділить площину на $2 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$ частини, тобто твердження справджується для $n = 1$.

2. Припустимо, що $n$ прямих ділять площину на $1+\frac{1}{2}n(n+1)$ частин. Нова $(n+1)$-а пряма перетне наявні $n$ прямих у $n$ точках, що поділять нову пряму на $(n+1)$ частин. Отже, з наявних $1+\frac{1}{2}n(n+1)$ частин площини буде перетнуто і поділено новою прямою $(n+1)$. Таким чином, при проведенні цієї прямої кількість частин, на які поділяється площина, зросте на $(n+1)$ і дорівнюватиме: $1+\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1) = 1+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

## 2.5. Цілі числа

**Теорема 2.** *На* $\mathbb{N}^2$ *задамо:*

- *відношення еквівалентності:* $(a;b)\sim(c;d) \Leftrightarrow a+d=b+c$;
- *відношення порядку:* $(a;b)<(c;d) \Leftrightarrow a+d<b+c$;

---

[1] Кожна така частина, як перетин півплощин, лежить по один бік від продовження відрізка, променя чи прямої ($n=1$), що її обмежує.

- *дії додавання та множення:*

$$(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d), \quad (a;b)\cdot(c;d)=(ac+bd;ad+bc). \qquad (2)$$

*Тоді класи еквівалентності суми та добутку відносно $\sim$ залежать тільки від класів еквівалентності доданків і співмножників.*

**Доведення.** Спочатку переконаємося, що $\sim$ — відношення еквівалентності. Рефлексивність і симетричність $\sim$ очевидні. Доведемо його транзитивність:

$$\begin{cases}(a;b)\sim(c;d)\\(c;d)\sim(f;g)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+d=c+b\\c+g=f+d\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a+d+c+g=c+b+f+d\ \Rightarrow\ a+g=f+b\ \Rightarrow\ (a;b)\sim(f;g).$$

Аналогічно доводять транзитивність відношення порядку $<$. Достатньо у поданих співвідношеннях знак рівності замінити на знак нерівності. Як бачимо, доведення транзитивності потребує лише використання властивостей додавання натуральних чисел.

З комутативності додавання та множення натуральних чисел та означення (2) випливає комутативність дій з парами натуральних чисел. За допомогою безпосередньої перевірки легко пересвідчитися у справдженні асоціативного та дистрибутивного законів.

$$\begin{aligned}((a;b)+(c;d))+(f;g) &= (a+c+f;b+d+g) = \\ &= (a;b)+((c;d)+(f;g));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&((a;b)\cdot(c;d))\cdot(f;g) = (ac+bd;ad+bc)\cdot(f;g) = \\ = &((ac+bd)f+(ad+bc)g;(ad+bc)f+(ac+bd)g) = \\ = &(acf+bdf+adg+bcg;adf+bcf+acg+bdg) = \\ = &(a(cf+dg)+b(cg+df);a(cg+df)+b(cf+dg)) = \\ = &(a;b)\cdot(cf+dg;cg+df) = (a;b)\cdot((c;d)\cdot(f;g));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a;b)\cdot((c;d)+(f;g)) = (a;b)\cdot(c+f;d+g) = \\ = &(a(c+f)+b(d+g);a(d+g)+b(c+f)) = \\ = &((ac+bd)+(af+bg);(ad+bc)+(ag+bf)) = \\ = &(a;b)\cdot(c;d)+(a;b)\cdot(f;g).\end{aligned}$$

Доведемо останнє твердження теореми.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}(a;b)\sim(a';b')\\(c;d)\sim(c'd')\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b'=a'+b\\c+d'=c'+d\end{cases} \Rightarrow\\
\Rightarrow\quad & (a+c)+(b'+d')=(a'+c')+(b+d) \Rightarrow\\
\Rightarrow\quad & (a+c;b+d)\sim(a'+c';b'+d').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a;b)\sim(a';b') \Rightarrow a+b'=a'+b \Rightarrow\\
\Rightarrow\quad & (a+b')c+(a'+b)d=(a'+b)c+(a+b')d \Rightarrow\\
\Rightarrow\quad & (ac+bd)+(a'd+b'c)=(a'c+b'd)+(ad+bc) \Rightarrow\\
\Rightarrow\quad & (ac+bd;ad+bc)\sim(a'c+b'd;a'd+b'c) \Rightarrow\\
\Rightarrow\quad & (a;b)\cdot(c;d)\sim(a';b')\cdot(c;d).
\end{aligned}$$

Використовуючи комутативність множення пар натуральних чисел та отримані співвідношення, можемо стверджувати, що за умов $(a;b)\sim(a';b')$ та $(c;d)\sim(c'd')$ справджуються такі еквівалентності: $(a;b)\cdot(c;d)\sim(a';b')\cdot(c;d)\sim(a';b')\cdot(c';d')$. Отже, можна вести мову про додавання та множення класів еквівалентності. Щоб знайти суму чи добуток двох класів еквівалентності, достатньо вибрати елементи кожного класу і знайти клас еквівалентності, до якого належить сума чи добуток вибраних представників. Як ми переконалися, результат не залежить від вибору конкретних представників доданків і співмножників.

**Означення 18.** *Множиною цілих чисел називатимемо множину класів еквівалентності $\mathbb{Z}=N^2/\sim$ з відношенням порядку, діями додавання і множення, запровадженими у теоремі 2.*

Властивості додавання, множення та відношення порядку для множини цілих чисел ті самі, що й для множини натуральних чисел. Для зручності будемо записувати клас еквівалентності пар так:

- $(a+b;b)$ — як $a$;
- $(b;a+b)$ — як *від'ємне* (зі знаком мінус) число $-a$;
- $(b;b)$ — як *нуль* 0, де $a,b\in\mathbb{N}$.

Впровадження нуля та від'ємних цілих чисел здійснено з метою запровадження дії віднімання, оберненої до додавання, так, щоб результат був завжди визначений. Це не потребує нових аксіом і здійснено таким чином: множину натуральних чисел розширено до декартового добутку самої на себе з подальшою *факторизацією* — розбиттям на класи еквівалентності.

## 2.6. Група, кільце і поле

**Означення 19.** *Множину $\mathfrak{G}$ називають групою, якщо:*

- *задано закон множення (композиції), який впорядкованій парі $(a;b)$ елементів $\mathfrak{G}$ ставить у відповідність добуток $ab$ — елемент $\mathfrak{G}$, котрий називають добутком $b$ на $a$ зліва або добутком $a$ на $b$ справа;*
- *справджується сполучний закон множення: $(ab)c{=}a(bc)$;*
- $\exists\ e \in \mathfrak{G} \quad \forall\ a \in \mathfrak{G} \quad ea = a$ *— існує ліва одиниця множення (нейтральний елемент групи) $e$, тобто такий елемент групи, множення на який зліва не змінює жоден елемент групи;*
- $\forall\ a \in \mathfrak{G} \quad \exists\ a^{-1} \in \mathfrak{G} \quad a^{-1}a = e$ *— для довільного елемента групи існує лівий обернений до нього, тобто такий, для якого добуток оберненого елемента на сам елемент дорівнює лівій одиниці множення.*

*Групу називають комутативною (áбелевою[1]), якщо множення комутативне, тобто добуток не залежить від порядку співмножників: $ab = ba$.*

Закон асоціативності множення (див. означення для трьох співмножників) формулюють ще й так: добуток не залежить від порядку виконання дії множення (не можна плутати з порядком співмножників). Саме у такій редакції його потрібно поширити на більшу кількість співмножників, розуміючи добуток як, наприклад, результат виконання дії множення у порядку запису зліва направо: $abc = (ab)c$, $abcd = ((ab)c)d$ і т. ін.

[1] Нільс Хенрик Абель (1802–1829) — норвезький математик. Дослідив питання про розв'язання рівняння 5-го степеня в радикалах, розвинув теорію еліптичних і гіпереліптичних функцій.

**Теорема 3.** *У групі лівий обернений елемент є також правим оберненим елементом, який для кожного елемента групи єдиний. Ліва одиниця є також правою одиницею — множення на неї справа не змінює жоден елемент групи:*

$$\forall\ a \in \mathfrak{G} \quad (aa^{-1} = e \wedge ae = a).$$

*Одиниця множення у групі — єдина.*

**Доведення.** Помножимо зліва рівність $(a^{-1}a)a^{-1} = a^{-1}$ на елемент, обернений до $a^{-1}$, і використаємо асоціативність множення. В результаті отримаємо: $aa^{-1} = e$, тобто лівий обернений елемент є також правим оберненим.

$$a = ea = (aa^{-1})a = a(a^{-1}a) = ae.$$

Як видно, кожна ліва одиниця є одночасно правою одиницею. Помноживши зліва і справа довільний елемент групи на його обернені й по-різному розставляючи дужки, тобто використовуючи асоціативність множення, легко пересвідчитися, що обернений елемент єдиний. Справді, якщо $b$ і $c$ — обернені до $a$, то матимемо:

$$b = b(ac) = (ba)c = c.$$

Обчислюючи добуток (одночасно лівих і правих) одиниць групи, легко пересвідчитися, що одиниця групи — єдина.

Множина цілих чисел — група за додаванням. Сукупність взаємно однозначних відображень довільної множини в себе — група щодо *суперпозиції* (послідовного застосування відображень).

**Означення 20.** *Множину $\mathbb{K}$ називатимемо кільцем, якщо:*

- $\mathbb{K}$ — *абелева група за додаванням* $+$;
- *на множині* $\mathbb{K}$ *задано множення, що є асоціативним;*
- *справджуються дистрибутивні закони:*

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{K} \quad a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca.$$

*Якщо множення комутативне, то й кільце називають комутативним.*

Приклад комутативного кільця — множина цілих чисел. Якщо дужки не вказують на інше, то спочатку виконують множення, а лише потім — додавання. Якщо кільце не має одиниці за множенням, то до нього завжди можна приєднати формально ще один елемент і доозначити множення на цей елемент так, щоб від був одиницею. Не обмежуючи загальності міркувань, надалі розглядатимемо тільки кільця з одиницею за множенням, яку позначимо через 1. Нейтральний елемент за додаванням називатимемо *нулем* і позначимо через 0. Елемент, обернений до $b$ відносно адитивної групи кільця, вважатимемо *протилежним* до $b$ і позначимо через $-b$, використовуючи запис $a-b$ замість $a+(-b)$.

**Теорема 4.** *Добуток будь-якого елемента кільця на нуль дорівнює нулю.*

**Доведення.** Нехай $a$ — довільний елемент кільця. Тоді матимемо:

$$0 \cdot a = (a-a) \cdot a = a \cdot a - a \cdot a = 0 = a \cdot (a-a) = a \cdot 0.$$

**Означення 21.** *Для довільного елемента кільця $a$ означимо рекурентно (послідовно) натуральні степені:*

$$a^1 = a, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a^{n+1} = a^n a.$$

*Якщо $a \neq 0$, то вважатимемо, що $a^0 = 1$.*

*Якщо існує обернений елемент $a^{-1}$, то для натурального $n$ вважатимемо, що $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$.*

Очевидно, що для довільних цілих $m$ та $n$ і довільного елемента кільця $a$ матимемо: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

**Означення 22.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Відмінні від нуля елементи кільця $a$ і $b$, для яких $ab = 0$, називають відповідно лівим і правим дільниками нуля.*

2. *Кільце називають цілісним, якщо воно комутативне і не має дільників нуля.*

3. *Тіло — кільце, в якому існує елемент, відмінний від нуля, і для всіх елементів кільця $a \neq 0$ та $b$ існують розв'язки рівнянь $ax = b$ та $ya = b$. Інакше кажучи, тіло з вилученим нулем утворює групу за множенням.*

*4. Поле — комутативне кільце, що є тілом.*

Інакше кажучи, поле — множина чисел, які можна додавати, *віднімати*, тобто додавати протилежний елемент, множити й *ділити*, тобто множити на обернений елемент. При цьому справджуються асоціативні, комутативні й дистрибутивні закони.

У кільці цілих чисел дільників нуля нема. Приклади кілець, які містять дільники нуля, описано далі. Прикладом тіла й поля є множина раціональних чисел.

## 2.7. Раціональні числа

**Теорема 5.** *Цілісне кільце можна помістити у певне поле, тобто для довільного цілісного кільця $\mathbb{K}$ існує поле, для підмножини якого можна встановити взаємно однозначну відповідність з кільцем $\mathbb{K}$. При цьому образи суми та добутку елементів кільця $\mathbb{K}$ — відповідно сума й добуток образів цих елементів.*

**Доведення.** На $\mathbb{K} \times (\mathbb{K}\backslash\{0\})$ задамо таке відношення:

$$(a; b) \sim (c; d) \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Очевидно, що $(a; b) \sim (ac; bc)$, якщо $bc \neq 0$. Рефлексивність відношення очевидна, симетричність випливає з комутативності множення. Доведемо транзитивність відношення.

$$\begin{cases} (a; b) \sim (c; d) \\ (c; d) \sim (f; g) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad = bc \\ cg = df \end{cases} \Rightarrow adcg - bcdf = cd(ag - bf) = 0. \qquad (3)$$

Якщо $c = 0$, то $ad = df = 0 \Rightarrow a = f = 0$, бо кільце не має дільників нуля. Якщо ж $c \neq 0$, то з останньої рівності у співвідношеннях (3) маємо: $ag = fb \Leftrightarrow (a; b) \sim (f; g)$, що й потрібно було довести. Таким чином, $\sim$ — відношення еквівалентності.

На $\mathbb{K} \times (\mathbb{K}\backslash\{0\})$ задамо додавання та множення:

$$(a; b) + (c; d) = (ad + bc; bd); \qquad (a; b) \cdot (c; d) = (ac; bd).$$

Комутативність цих дій — результат комутативності відповідних дій у кільці $\mathbb{K}$. Доведемо справдження асоціативних законів.

$$((a; b) + (c; d)) + (f; g) \quad = \quad (ad + bc; bd) + (f; g) \;\; =$$

$$
\begin{aligned}
= \ ((ad+bc)g+bdf; bdg) \ &= \ (a(dg)+b(cg+df); b(dg)) \ = \\
&= \ (a;b)+((c;d)+(f;g));
\end{aligned}
$$

$$((a;b)\cdot(c;d))\cdot(f;g) = (acf;bdg) = (a;b)\cdot((c;d)\cdot(f;g)).$$

Покажемо, що клас еквівалентності щодо $\sim$ суми й добутку пар залежить лише від класів еквівалентності доданків і множників. Якщо $\begin{cases}(a;b)\sim(a';b')\\(c;d)\sim(c'd')\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab'=a'b\\cd'=c'd\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ab'dd'=a'bdd'\\bb'cd'=bb'c'd\end{cases}$, то

$$
\begin{aligned}
(ac)(b'd') = (a'c')(bd) \ &\Leftrightarrow \ (ac;bd)\sim(a'c';b'd') \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ (a;b)\cdot(c;d)\sim(a';b')\cdot(c';d'), \\
(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd \ &\Leftrightarrow \ (ad+bc;bd)\sim(a'd'+b'c';b'd') \\
&\Leftrightarrow \ (a;b)+(c;d)\sim(a';b')+(c'd').
\end{aligned}
$$

Отже, можна вести мову про додавання та множення класів еквівалентності. Для того, щоб знайти суму чи добуток двох класів еквівалентності, достатньо з'ясувати, до якого класу належить сума чи добуток представників кожного класу. Як ми вже показали, результат, тобто клас еквівалентності суми чи добутку, не залежить від вибору представників. Зберігши позначення $+$, $-$, $\cdot$ відповідно для додавання, віднімання і множення, клас еквівалентності пари $(a;b)$ позначатимемо надалі у вигляді дробу $a/b$ або $\frac{a}{b}$, де $a$ називається ***чисельником***, а $b$ — ***знаменником*** дробу. З означення відношення еквівалентності випливають відомі *правила дій з дробами:*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}, \qquad \frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}.$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{f}{g}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{cg+df}{dg}=\frac{acg+adf}{bdg}=\frac{acg}{bdg}+\frac{adf}{bdg}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{g}.$$

Таким чином, справджується розподільний закон.

Отже, $\mathbb{K}\times(\mathbb{K}\backslash\{0\})/\sim$ утворює комутативне кільце.

Нулем (позначатимемо його, як і раніше, 0) цього кільця є клас еквівалентності пар вигляду $(0;b)$, а одиницею (позначатимемо її, як і раніше, 1) — клас еквівалентності пар вигляду $(b;b)$, де $b\neq 0$.

Якщо $a$, $b$ — відмінні від нуля елементи $\mathbb{K}$, то матимемо:

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=0; \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,$$

тобто $\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \backslash \{0\}) / \sim$ — поле. Відповідність $a \to a/1$ між елементами $\mathbb{K}$ та підмножини побудованого поля така, що образом суми і добутку є відповідно сума та добуток образів.

**Означення 23.** *Означимо ділення дробів як множення на обернений до дільника дріб:*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

*Тут $a/b$ — ділене, $c/d$ — дільник, $ad/bc$ — частка.*

**Означення 24.** *Якщо за цілісне кільце $\mathbb{K}$ взяти множину цілих чисел $\mathbb{Z}$, то в результаті побудови, описаної в доведенні теореми 5, утвориться поле раціональних чисел $\mathbb{Q}$.*

Запровадження поля раціональних чисел здійснено з метою визначенності *ділення* (операції, оберненої до множення) для всіх дільників, відмінних від нуля.

**Означення 25.** *Дії додавання $+$, віднімання $-$ (додавання протилежного числа), множення $\cdot$ і ділення (множення на обернений елемент) називають арифметичними діями.*

*Раціональний вираз — вираз, отриманий зі скінченної кількості незалежних змінних та чисел за допомогою скінченної кількості арифметичних дій. Такий вираз ще називають арифметичним.*

*Раціональна функція — функція, значення якої обчислюють як величину певного раціонального виразу від аргументу функції.*

Поле раціональних чисел — найменше[1] поле, що містить ряд натуральних чисел. Справді, кільце цілих чисел — це мінімальне цілісне кільце, яке містить ряд натуральних чисел (за побудовою). Згідно з доведеною теоремою, множина раціональних чисел — мінімальне поле, що містить вказане цілісне кільце.

**Означення 26.** *Раціональне число з натуральним знаменником називають додатним, якщо його чисельник додатний, і від'ємним — якщо його чисельник від'ємний.*

*Означимо відношення порядку раціональних чисел:*

---

[1] Найменше (мінімальне) в тому розумінні, що всі інші, які мають цю властивість, містять дане як підмножину.

- *будь-яке від'ємне раціональне число менше, ніж нуль, що менший за довільне додатне раціональне число;*

- *одне раціональне число менше, ніж інше, якщо різниця першого і другого чисел від'ємна:*

$$\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{N} \quad \frac{-a}{b} < 0 < \frac{c}{d} \ \wedge \ \left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \ \Leftrightarrow \ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0\right).$$

**Зауваження 6.** *Зміст нерівності зберігається при:*

- *додаванні до обох частин нерівності одного й того самого числа;*

- *множенні обох частин нерівності на одне й те саме додатне число.*

# Розділ 3. Комбінаторика

## 3.1. Рівнопотужність. Зліченність

*Комбінаторика, комбінаторний аналіз* — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору й розташування елементів певної, найчастіше скінченної множини відповідно до заданих правил.

**Означення 27.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Множини $A$ і $B$ рівнопотужні, якщо можна встановити взаємно однозначну відповідність між їх елементами. Записуватимемо це таким чином: $|A| = |B|$.*

2. *Множина $A$ — зліченна, якщо вона рівнопотужна підмножині ряду натуральних чисел. Якщо множина не є зліченною, то будемо називати її незліченною.*

3. *Множина $A$ є скінченною і має $n$ елементів, де $n$ — натуральне число, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел у межах від 1 до $n$ включно. $|A| = n$ — скорочений запис цього твердження. Якщо множина не є скінченною, то будемо називати її нескінченною.*

Довільна підмножина зліченної множини — зліченна. Ряд натуральних чисел рівнопотужний собі, тому він — зліченна множина.

**Означення 28.** *Послідовність елементів множини $A$, що мають індекси з множини $B$, — відображення з множини $B$ у множину $A$, визначене на всій множині $B$. Якщо множину $B$ не описано, то вважається, що $B$ — ряд натуральних чисел або множина такого вигляду: $\{1, 2, 3, \ \dots\ , (n-1),\ n\}$. У першому випадку кажуть про нескінченну послідовність, у другому — про скінченну послідовність, що має $n$ членів.*

*При цьому $k$-им членом послідовності називають образ натурального $k$ для відповідного відображення. Його позначають як $a_k$, де замість літери $a$ можна записати будь-яку іншу.*

*Послідовність з $n$ членів позначають так: $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, нескінченну послідовність — $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$, довільну — $\{a_k\}$. Впорядкувати злічену множину $A$, тобто занумерувати натуральними числами елементи $A$, означає задати таку послідовність, всі члени якої різні, а кожен елемент $A$ є членом цієї послідовності.*

Таке означення дає змогу формалізувати інтуїтивно зрозумілі поняття послідовності і впорядкування елементів множини, тобто звести їх до вже відомих аксіом та означень.

## 3.2. Комбінаторне правило множення

Нехай потрібно виконати деяку дію, яка полягає у послідовному виконанні $k$ таких елементарних дій, що першу дію можна виконати $n_1$ способами, другу — $n_2$ способами незалежно від результату першої дії, ... , $k$-ту — $n_k$ способами незалежно від результату виконання всіх попередніх елементарних дій. Тоді цю дію можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ способами. Це так зване *комбінаторне правило множення.*

**Теорема 6.** *Кількість всіх підмножин $n$-елементної множини дорівнює $2^n$.*

**Доведення.** Задати певну підмножину $n$-елементної множини означає для кожного з $n$ елементів визначити, чи належить він до підмножини. Кожну з таких $n$ дій можна здійснити двома способами, а тому, згідно з комбінаторним правилом множення, загальна кількість всіх підмножин $n$-елементної множини дорівнює: $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ разів}} = 2^n$.

## 3.3. Найпростіші поняття комбінаторики

**Означення 29.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Перестановка $n$-елементної множини — взаємно однозначне відображення цієї множини на себе.*

2. *Розміщення (без повторень) елементів з $n$ по $k$ — впорядкована $k$-елементна підмножина $n$-елементної множини.*

3. *Комбінацією елементів з $n$ по $k$ називають $k$-елементну підмножину $n$-елементної множини.*

**Теорема 7.** *Кількість перестановок $n$-елементної множини дорівнює:*

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

*Кількість розміщень елементів з $n$ по $k$ дорівнює:*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

*Кількість комбінацій елементів з $n$ по $k$ дорівнює:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Доведення.** Для взаємно однозначного відображення $A$ в себе першому елементу відповідає один з $n$ елементів, другому — один з $(n-1)$-го (тих, які залишились) і т. ін. Згідно з комбінаторним правилом множення, кількість таких перестановок дорівнює:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Останній вираз потрібно читати так: "ен-факторіал".

При виборі впорядкованої підмножини з $k$ елементів на першому місці може опинитися один з $n$ елементів, на другому — один з $(n-1)$-го, ... , на $k$-му — один з $(n-k+1)$-го. Отже, кількість всіх розміщень дорівнює:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

З іншого боку, це число дорівнює добутку $C_n^k$ (кількості способів вибору $k$-елементних підмножин) та $P_k$ (кількості впорядкувань $k$-елементної множини):

$$A_n^k = C_n^k\ P_k \ \Leftrightarrow\ C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

**Зауваження 7.** *Для того, щоб доведені твердження справджувалися для $k = 0$ або $k = n$, потрібно припустити, що $0! = 1$.*

**Наслідок 2.** *Для довільних натуральних $k$ та $n$ з нерівності $k \le n$ випливає така рівність:* $C_n^k = C_n^{n-k}$.

**Зауваження 8.** *Останню рівність можна довести за допомогою суто комбінаторних міркувань без використання формул для знаходження цих кількостей: існує взаємно однозначна відповідність між $k$-елементними підмножинами $n$-елементної множини та їх $(n-k)$-елементними доповненнями до $n$-елементної множини.*

**Теорема 8.** *Якщо* $0 < k < n$, *то маємо:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{4}$$

**Доведення.** Нехай $a$ — один з елементів $n$-елементної множини $A$. Кількість всіх $k$-елементних підмножин цієї множини дорівнює сумі кількості $k$-елементних підмножин, що містять цей елемент, і кількості $k$-елементних підмножин, які не містять цього елемента. Перші підмножини утворюються об'єднанням $\{a\}$ з $(k-1)$-елементними підмножинами $(n-1)$-елементної множини $A \setminus \{a\}$, кількість яких дорівнює $C_{n-1}^{k-1}$. Решту множин утворено способом вибору $k$-елементної підмножини $(n-1)$-елементної множини $A \setminus \{a\}$, тому кількість останніх дорівнює $C_{n-1}^k$.

Некомбінаторне доведення буде таким:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!}(n-k+k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k. \end{aligned}$$

Таблицю, подану нижче, називають трикутником Паскаля[1].

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

[1] Блез Паскаль (1623–1662) — французький математик, фізик і філософ. Один з творців теорії ймовірностей, диференціального та інтегрального числення. Створив лічильну машину для виконання двох арифметичних дій.

Всі крайні елементи цієї таблиці дорівнюють одиниці, а кожен її внутрішній елемент — сума двох найближчих сусідів, розташованих над ним. Перші рядки цієї таблиці мають такий вигляд:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \\ .&.&.&.&.&.&.&.&. \end{array}$$

## 3.4. Біномна формула

**Теорема 9.** *Для довільного натурального $n$ та довільних елементів кільця $a$ та $b$ маємо:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

**Доведення.** Подамо спочатку доведення, що ґрунтується на суто комбінаторних міркуваннях.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ разів}}. \tag{5}$$

Якщо виконати всі дії множення, використовуючи розподільний закон, то отримаємо суму доданків вигляду $a^{n-j}b^j$. При утворенні кожного такого доданка беруть участь як співмножники $a$ або $b$ у кожній з дужок правої частини рівності (5). Доданок $a^{n-j}b^j$ виникає, якщо ми виберемо з $j$ дужок співмножник $b$, а з решти $(n-j)$ дужок — співмножник $a$, що можна зробити $C_n^j$ способами.

Цю ж теорему доводять методом математичної індукції, використовуючи співвідношення (4). Маємо:

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

тобто рівність (5) справджується для $n = 1$. Якщо рівність (5) справджується для натурального $n$, то:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = \\ &= (a+b)\left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n\right), \end{aligned}$$

що дорівнює:

$$\begin{aligned} C_{n+1}^0 a^{n+1} + \quad C_n^1 a^n b + \cdots + \quad C_n^n ab^n + \\ + \quad C_n^0 a^n b + \cdots + C_n^{n-1} ab^n + \quad C_n^n b^{n+1} = \\ = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \cdots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} \quad . \end{aligned}$$

**Наслідок 3.** *Подавши* $(1 \pm 1)^n$ *сумою доданків за допомогою біномної формули, маємо:*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n;$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + C_n^n \cdot (-1)^n = 0.$$

Перша рівність має прозоре комбінаторне тлумачення: кількість всіх підмножин $n$-елементної множини дорівнює сумі за індексом $k$ у межах від 0 до $n$ включно кількості $k$-елементних підмножин.

## 3.5. Рекурентні співвідношення

**Задача 4.** *Скільки існує n-цифрових*[1] *натуральних чисел, сума цифр кожного з яких дорівнює* $m$*?*

**Розв'язання.** Знайдемо кількість різних $n$-цифрових чисел, записаних за допомогою $n_0$ нулів, $n_1$ одиниць, $n_2$ двійок, ... , $n_9$ дев'яток, де

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_9. \tag{6}$$

На першому місці може стояти одна з $(n - n_0)$ цифр, відмінних від 0, на другому — одна з $(n-1)$-ої, що залишаться, на третьому — одна з $(n-2)$-ох, що залишаться, і т. ін. Якщо всі цифри вважати різними, то утворені таким чином послідовності різні, а їхня кількість дорівнює:

$$(n - n_0) \cdot (n-1)!$$

Останнє число є добутком шуканої кількості й кількостей перестановок множин з $n_0$, $n_1$, $n_2$ , ... , $n_9$ елементів. Отже, шукана кількість дорівнює:

$$\frac{(n - n_0) \cdot (n-1)!}{n_0! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdots n_9!} \ . \tag{7}$$

[1] Вичерпний опис систем числення подано далі. Для повного розв'язання цієї задачі достатньо знань, набутих у початкових класах.

Кількість різних $n$-цифрових чисел, сума цифр кожного з яких дорівнює $m$, є сумою доданків вигляду (7) за всіма послідовностями невід'ємних цілих чисел $\{n_j\}_{j=0}^{9}$, для яких маємо:

$$0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 9 \cdot n_9 = m. \tag{8}$$

На перший погляд, задачу 4 розв'язано. Проаналізуємо, наскільки ефективно. Розглянемо випадки $m = 3$, $n = 5$ і $m = 6$, $n = 8$. Числа 3 і 6 подамо відповідно сумою 5 і 8 цифр. Подання впорядкуємо за зростанням кількості відмінних від 0 цифр, а для сталої кількості — за спаданням найбільшого числа, яке можна записати за допомогою цих цифр. Такі подання — своєрідна форма запису послідовностей чисел $\{n_j\}_{j=0}^{9}$, що задовольняють умови (6, 8).

$$3 = 3+0+0+0+0 = 2+1+0+0+0 = 1+1+1+0+0,$$

$$\begin{aligned} 6 &= 6+0+0+0+0+0+0+0 = 5+1+0+0+0+0+0+0 = \\ &= 4+2+0+0+0+0+0+0 = 3+3+0+0+0+0+0+0 = \\ &= 4+1+1+0+0+0+0+0 = 3+2+1+0+0+0+0+0 = \\ &= 2+2+2+0+0+0+0+0 = 3+1+1+1+0+0+0+0 = \\ &= 2+2+1+1+0+0+0+0 = 2+1+1+1+1+0+0+0 = \\ &= 1+1+1+1+1+1+0+0. \end{aligned}$$

Знайдемо суму відповідних доданків вигляду (7), вилучивши множення на 0! і 1! із запису арифметичних дій та подавши суми однакових доданків у вигляді добутку величин доданків на їхню кількість:

$$1 + \frac{2 \cdot 4!}{3!} + \frac{3 \cdot 4!}{2! \cdot 3!} = 1 + 8 + 6 = 15.$$

Отже, існує 15 п'ятицифрових чисел, сума цифр кожного з яких дорівнює 3.

$$1 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 7!}{6!} + \frac{2 \cdot 7!}{6! \cdot 2!} + \frac{3 \cdot 7!}{5! \cdot 2!} + \frac{3 \cdot 7!}{5!} + \frac{3 \cdot 7!}{5! \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{4 \cdot 7!}{4! \cdot 3!} + \frac{4 \cdot 7!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{5 \cdot 7!}{3! \cdot 4!} + \frac{6 \cdot 7!}{2! \cdot 6!} =$$

$$= 1 + 28 + 7 + 63 + 126 + 21 + 140 + 210 + 175 + 21 = 792.$$

Таким чином, існує 792 восьмицифрових числа, сума цифр кожного з яких дорівнює 6. Очевидно, що запропоноване розв'язання пов'язане з катастрофічним зростанням кількості обчислень при збільшенні $m$ і $n$.

*Підступність* задачі 4 у тому, що намагання систематизувати спосіб отримання відповіді штовхає до подрібнення задачі на велику кількість інших комбінаторних задач. Виявляється, встановивши деякі рекурентні співвідношення, можна істотно зменшити обсяг обчислень. Саме в цьому полягає *повчальність* цієї задачі.

**Теорема 10.** *Позначимо через $c(n,m)$ кількість $n$-цифрових чисел, сума цифр яких дорівнює $m$. Тоді матимемо:*

$$\begin{aligned} c(1,1) &= c(1,2) = c(1,3) = c(1,4) = c(1,5) = c(1,6) = \\ &= c(1,7) = c(1,8) = c(1,9) = 1; \qquad (9) \\ c(1,10) &= c(1,11) = c(1,12) = \cdots = 0; \qquad (10) \\ c(n,m) &= c(n-1,m) + c(n-1,m-1) + c(n-1,m-2) + \\ &\quad + \cdots + c(n-1, \max(1, m-9)). \qquad (11) \end{aligned}$$

**Доведення.** Безпосередньою перевіркою можна пересвідчитися в істинності рівностей (9–10). Доведемо рекурентне співвідношення (11). Будь-яке $n$-цифрове число можна отримати шляхом дописування до $(n-1)$-цифрового числа праворуч (у розряд одиниць) однієї з цифр. При цьому сума цифр числа зростає на величину дописуваної цифри. Таким чином, у співвідношенні (11) перший доданок ліворуч від знака рівності відповідає дописуванню 0, другий — дописуванню 1, третій — дописуванню 2 і т. ін.

Рекурентне правило додавання (11) разом з початковими значеннями (9–10) дає повне розв’язання задачі.

У поданій таблиці 7:

- перший рядок містить величини $m = 1, 2, 3, \dots, 10$, перший стовпчик — величини $n = 1, 2, 3, \dots, 20$, а решта елементів таблиці — відповідні величини $c(n,m)$;
- у другому стовпчику $c(n,1) = 1$ (існує єдине $n$-цифрове число $1\underbrace{000\cdots000}_{n-1 \text{ нуль}}$, сума цифр якого дорівнює 1);
- якщо $n > 1$, то $c(n,m) = c(n-1,m) + c(n,m-1)$.

*Таблиця 7*

Відповідь до задачі 4 в окремих випадках

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 54 |
| 4 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 219 |
| 5 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 714 |
| 6 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | 1287 | 2001 |
| 7 | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 | 3003 | 5004 |
| 8 | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | 6435 | 11439 |
| 9 | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | 3003 | 6435 | 12870 | 24309 |
| 10 | 1 | 10 | 55 | 220 | 715 | 2002 | 5005 | 11440 | 24310 | 48619 |
| 11 | 1 | 11 | 66 | 286 | 1001 | 3003 | 8008 | 19448 | 43758 | 92377 |
| 12 | 1 | 12 | 78 | 364 | 1365 | 4368 | 12376 | 31824 | 75582 | 167959 |
| 13 | 1 | 13 | 91 | 455 | 1820 | 6188 | 18564 | 50388 | 125970 | 293929 |
| 14 | 1 | 14 | 105 | 560 | 2380 | 8568 | 27132 | 77520 | 203490 | 497419 |
| 15 | 1 | 15 | 120 | 680 | 3060 | 11628 | 38760 | 116280 | 319770 | 817189 |
| 16 | 1 | 16 | 136 | 816 | 3876 | 15504 | 54264 | 170544 | 490314 | 1307503 |
| 17 | 1 | 17 | 153 | 969 | 4845 | 20349 | 74613 | 245157 | 735471 | 2042974 |
| 18 | 1 | 18 | 171 | 1140 | 5985 | 26334 | 100947 | 346104 | 1081575 | 3124549 |
| 19 | 1 | 19 | 190 | 1330 | 7315 | 33649 | 134596 | 480700 | 1562275 | 4686824 |
| 20 | 1 | 20 | 210 | 1540 | 8855 | 42504 | 177100 | 657800 | 2220075 | 6906899 |

**Лема 1.** *Якщо $m > 9n$, то $c(n,m) = 0$. Якщо ж $m \le 9n$, то матимемо:*

$$c(n,m) = c(n, 9n+1-m). \tag{12}$$

**Доведення.** Перше твердження теореми — наслідок того, що сума цифр $n$-цифрового числа не перевищує $9n$. Доведемо друге твердження, поставивши кожному $n$-цифровому числу $x$ із сумою цифр $m$ у взаємно однозначну відповідність $n$-цифрове число $10\underbrace{999\cdots999}_{n-1 \text{ дев'ятка}} - x$, сума цифр якого дорівнює: $9n+1-m$. При цьому перша (відмінна від 0) цифра $i_1$ числа $x$ замінюється на цифру $10-i_1$, а кожна з наступних цифр $i_j$, що перебувають у межах від 0 до 9 включно, замінюється на $9-i_j$ (в тих самих межах), $j = 2, 3, \ldots, n$. З існування взаємно однозначної відповідності й випливає рівність (12).

# Розділ 4. Відношення подільності

## 4.1. Ділення цілих чисел з остачею

**Означення 30.** *Цілісне кільце $\mathbb{K}$ називають евклідовим*[1]*, якщо існує така функція $g : \mathbb{K}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ з підмножини ненульвих елементів кільця у множину натуральних чисел (евклідова норма), що:*

- *для довільних двох відмінних від нуля елементів кільця норма їхнього добутку визначена і не менша, ніж норма кожного з них:*
$$\forall\ a, b \in \mathbb{K} \quad a \neq 0 \neq b \ \Rightarrow \ g(ab) \geq g(a); \tag{13}$$

- *довільний елемент кільця (ділене) завжди можна поділити на відмінний від нуля елемент (дільник) без остачі або так, щоб евклідова норма остачі була меншою, ніж евклідова норма дільника:*
$$\forall\ a, b \in \mathbb{K} \quad a \neq 0 \Rightarrow \exists\ q, r \in \mathbb{K} \begin{cases} b = aq + r, \\ r = 0 \ \vee \ g(r) < g(a). \end{cases} \tag{14}$$

  *У висловлюванні (14) $a$ — дільник, $b$ — ділене, $q$ — частка, $r$ — остача від ділення.*

**Теорема 11.** *Кільце цілих чисел — евклідове кільце з нормою:*
$$g(n) = \begin{cases} n, & \text{якщо } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \\ -n, & \text{якщо } n \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} \quad —$$
*і невід'ємними остачами.*

**Доведення.** Властивість норми (13) випливає з властивостей множення натуральних та цілих чисел. Доведемо властивість (14) для кільця цілих чисел.

Якщо $b = 0 \neq a$, то існує подання $b = a \cdot 0 + 0$.

---

[1] Евклід (близько 365–300 до н. е.) — давньогрецький математик. Започаткував аксіоматичний виклад геометрії у своєму найвідомішому творі "Початки".

Розглянемо детально випадок натуральних $a$, $b$, які можна подати у вигляді суми одиниць:

$$a = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{a \text{ разів}}, \qquad b = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{b \text{ разів}}.$$

Позначимо через $q$ максимальну кількість груп по $a$ одиниць, які можна виділити у поданні числа $b$. Тоді ціле число $r = b - aq$ лежить у межах від 0 до $(a-1)$ включно, тобто існує подання (14) числа $b$ :

$$\overbrace{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{a \text{ разів}}+\cdots+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{a \text{ разів}}}^{q \text{ разів по } a \text{ разів}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{r \text{ разів}}.$$

Нехай для $b < 0 < a$ невід'ємні $q'$ і $r'$ — частка й остача від ділення $-b$ на $a$ (див. попередні міркування). Тоді маємо: $-b = aq' + r'$ і $b = a \cdot (-q') - r'$. Частку $q$ та остачу $r$ виберемо за таким правилом: якщо $r' = 0$, то $q = -q'$ і $r = 0$, інакше $q = -q' - 1$ і $r = a - r'$.

Нехай для $a < 0 < b$ невід'ємні $q'$ і $r'$ — частка й остача від ділення $b$ на $-a$. Тоді маємо: $b = -aq' + r' = a \cdot (-q') + r'$. Виберемо $q = -q'$, $r = r'$.

Нехай для від'ємних $a$ та $b$ невід'ємні $q'$ та $r'$ — частка й остача від ділення $-b$ на $-a$. Тоді маємо: $-b = -aq' + r' \Leftrightarrow b = aq' - r'$. Частку $q$ та невід'ємну остачу $r$ виберемо за таким правилом: якщо $r' = 0$, то $q = q'$ і $r = 0$, інакше $q = q' + 1$ і $r = -a - r'$.

## 4.2. Многочлени однієї змінної

**Означення 31.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Многочленом змінної $x$ називають функцію такого вигляду*[1] *:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j. \qquad (15)$$

[1] Для скороченого запису суми виразів, що залежать від натурального індексу, використовують позначення суми $\Sigma$, під яким вказують початкове значення індексу (нижню межу), над яким — кінцеве значення (верхню межу).

2. *Числа* $a_n$, $a_{n-1}$, ... , $a_1$, $a_0$ *— коефіцієнти многочлена.*

3. *Якщо* $a_n \neq 0$, *то вираз (15) — многочлен n-го степеня,* $a_n$ *— його старший коефіцієнт,* $a_0$ *— вільний член.*

4. $\mathbb{Q}[x]$ *— кільце многочленів змінної x над полем* $\mathbb{Q}$ *— множина всіх многочленів, коефіцієнти яких є елементами поля* $\mathbb{Q}$, *з операціями додавання та множення:*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} a_j x^j + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j &= \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j) x^j, \\ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \cdot \sum_{k=0}^{m} b_k x^k &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_j b_k x^{j+k}.\end{aligned}$$

5. *Якщо* $f(c) = 0$, *то число* $c$ *— корінь многочлена* $f(x)$.

Многочлен — частковий випадок раціональної функції. Обчислювати значення многочлена зручно за такою формулою:

$$((\cdots((a_n c + a_{n-1})c + a_{n-2})c + \cdots)c + a_1)c + a_0,$$

записуючи проміжні результати у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;

- елемент 2-го рядка, починаючи від 3-го елемента, дорівнює сумі елемента таблиці над обчислюваним елементом і попереднім елементом рядка, помноженим на $c$, що є 1-им елементом 2-го рядка.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_0$ |
| c | $a_n$ | $a_{n-1} + ca_n$ | $a_{n-2} + c(a_{n-1} + ca_n)$ | ... | $a_0 + c(...(a_{n-1} + ca_n)...)$ |

Таку таблицю і відповідний алгоритм називають схемою Горнера[1].

[1]Вільямс Джонс Горнер (1786–1837) — англійський математик. Працював у галузі алгебри.

## 4.3. Ділення многочленів з остачею

**Теорема 12.** *Кільце многочленів однієї змінної над полем — евклідове кільце щодо норми, що є степенем многочлена, збільшеним на одиницю. Інакше кажучи, у кільці многочленів можна ділити з остачею на відмінні від нуля многочлени так, щоб остача дорівнювала нулю, або її степінь був менший, ніж степінь дільника.*

**Доведення.** Зауважимо, що при діленні на сталу, відмінну від нуля, остача дорівнює нулю. Доведемо теорему методом математичної індукції за степенем діленого для відмінного від нуля дільника $f(x)$ степеня $n$ зі старшим коефіцієнтом $a_n \neq 0$.

1. Якщо степінь дільника більший, ніж степінь діленого, то частка дорівнює нулю, а остача — діленому.

2. Припустимо, що для всіх многочленів, степінь яких не перевищує $m$, існує подання їх у вигляді суми:

$$f(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{16}$$

   де $q(x)$ та $r(x)$ — многочлени змінної $x$, причому $r(x) = 0$ або степінь $r(x)$ менший, ніж $n$. Нехай

$$g(x) = b_{m+1}x^{m+1} + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \quad —$$

   довільний многочлен степеня $m + 1 \geq n$, $b_{m+1} \neq 0$.

   Тоді матимемо:

$$g(x) = \frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} f(x) + \left( g(x) - \frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} f(x) \right),$$

   де вираз у дужках — многочлен, степінь якого не перевищує $m$, для якого за припущенням індукції існує подання (16). Таким чином:

$$g(x) = f(x) \left( \frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} + q(x) \right) + r(x),$$

   де $q(x)$ та $r(x)$ — многочлени змінної $x$, причому $r(x) = 0$ або степінь $r(x)$ менший, ніж $n$.

**Зауваження 9.** *Теорема справджується для довільного поля коефіцієнтів.*

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик". Наприклад, таке подання:

$$\begin{aligned} & 6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 \ = \\ = \quad & (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16 \quad - \end{aligned}$$

отримують у результаті виконання таких дій:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} - & 6x^5 & -17x^4 & +25x^3 & -31x^2 & +13x & +10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{8-8} & 6x^5 & -9x^4 & +3x^3 & & & & 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \\ \cline{2-4} & - & -8x^4 & +22x^3 & -31x^2 & & & \\ & & -8x^4 & +12x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{3-5} & & - & 10x^3 & -27x^2 & +13x & & \\ & & & 10x^3 & -15x^2 & +5x & & \\ \cline{4-6} & & & - & -12x^2 & +8x & +10 & \\ & & & & -12x^2 & +18x & -6 & \\ \cline{5-7} & & & & & -10x & +16 & \end{array}$$

Ділення "у стовпчик" здійснюється зменшенням степеня діленого.

## 4.4. Теорема Безу та її наслідки

**Теорема 13 (Безу).**[1] *Остача від ділення многочлена змінної $x$ на $(x - c)$ дорівнює значенню многочлена для $x = c$.*

**Доведення.** Поділимо многочлен (15) з остачею на $(x - c)$:

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r, \tag{17}$$

де $q(x)$ — деякий многочлен, $r$ — стала. Підставивши значення $x = c$ в рівність (17), маємо: $f(c) = r$. Таким чином, схема Горнера — схема обчислення коефіцієнтів частки (елементи 2-го рядка, починаючи з 2-го) та остачі (останній елемент 2-го рядка таблиці) від ділення на лінійний вираз $(x - c)$.

[1] Етьєн Безу (1730–1783) — французький математик. Зробив внесок у теорію лінійних рівнянь і визначників. Розвинув теорію виключення змінних із систем рівнянь вищих степенів.

**Наслідок 4.** *Згідно з теоремою Безу, маємо:*

1. *Якщо $c$ — корінь многочлена $f(x)$, то $f(x)$ ділиться без остачі на $(x - c)$.*

2. *Кількість коренів многочлена не перевищує степеня многочлена.*

**Означення 32.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Дільником $a$ є $b$ (позначають так: $a \vdots b$ або $b \mid a$), якщо знайдеться таке $c$, що $a$ дорівнює добутку $bc$:*

$$a \vdots b \Leftrightarrow b \mid a \Leftrightarrow \exists\, c \quad a = bc.$$

   *У даному разі кажуть, що $a$ є кратним $b$, $a$ ділиться на $b$ без остачі.*

2. *Коренем многочлена $f(x)$ натуральної кратності $k$ є $c$, якщо*

   $f(x) \vdots (x - c)^k$, *але* $f(x) \not\vdots (x - c)^{k+1}$.

Щоб знайти кратність кореня $c$, достатньо поділити многочлен на лінійний вираз $(x - c)$, використовуючи схему Горнера, до тих пір, поки остача від ділення перестане дорівнювати 0.

## 4.5. Найбільший спільний дільник

Виклад теорії подільності здійснено для евклідового кільця без використання конкретного виду кільця цілих чисел для того, щоб використати ці результати в дослідженні многочленів.

**Означення 33.** *Найбільшим спільним дільником $a$ та $b$ є $p$ (записують так: $p = \text{НСД}(a, b)$), якщо:*

- *$p$ — спільний дільник $a$ та $b$, тобто $a \vdots p \ \wedge \ b \vdots p$;*
- *будь-який інший спільний дільник $a$ та $b$ — дільник $p$:*

$$(a \vdots q \ \wedge \ b \vdots q) \ \Rightarrow \ p \vdots q.$$

Як випливає з означення, для довільного натурального $n$ у кільці цілих чисел маємо: $\text{НСД}(0,0)=0, \quad \text{НСД}(0,n)=\text{НСД}(0,-n)=n.$

**Зауваження 10.** *Для однозначності трактування поняття найбільший спільний дільник будемо розуміти як такий елемент кільця, що відповідає поданому означенню і:*

- *у кільці цілих чисел — невід'ємний;*
- *у кільці многочленів його старший коефіцієнт дорівнює* 1.

Справді, якщо $d$ та $d'$ — найбільші спільні дільники $a$ і $b$, то існують такі $k$ і $k'$, при яких матимемо:

$$\begin{cases} d=d'k' \\ d'=dk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=d'k' \\ d'=dk \\ d=dkk' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=d'k' \\ d'=dk \\ d(1-kk')=0 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} d=d'=0 \\ 1=kk' \end{array} \right. .$$

Якщо спільний дільник дорівнює нулю, то й елементи кільця $a$ і $b$ дорівнюють нулю: $d=d'=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow \text{НСД}(a,b)=0.$

Якщо спільний дільник відмінний від нуля, то:

- у кільці цілих чисел $k$ та $k'$ — натуральні числа, добуток яких дорівнює 1, звідси $k=k'=1$;
- у кільці многочленів $k$ та $k'$ — многочлени, добуток і старші коефіцієнти яких дорівнюють 1, звідси $k=k'=1$.

Дамо еквівалентне означення найбільшого спільного дільника. Воно не таке прозоре, як означення 33, але зручніше для доведення багатьох теорем.

**Теорема 14.** *Для $a$ і $b$ — елементів евклідового кільця $\mathbb{K}$, з яких хоча б один відмінний від нуля, означимо таку множину:*

$$I(a,b)=\{ax+by|\ x,y\in\mathbb{K}\}.$$

*У цій множині знайдеться відмінний від нуля елемент $d$, евклідова норма $g(d)$ якого найменша:*

$$\exists\ d\in I(a,b) \quad g(d)=\min_{c\in I(a,b)} g(c)=\min_{x,y\in\mathbb{K}} g(ax+by). \tag{18}$$

*Тоді множина $I(a,b)$ складається з елементів, кратних $d$:*

$$I(a,b) = \{ax + by |\ x, y \in \mathbb{K}\} = \{cd |\ c \in \mathbb{K}\}, \tag{19}$$

*причому $d =$ НСД$(a,b)$ — найбільший спільний дільник $a$ та $b$.*

**Доведення.** Твердження (18) справджується, бо у непорожній підмножині ряду натуральних чисел завжди існує найменший елемент. Нехай $d = ax + by$. Поділимо з остачею довільну лінійну комбінацію $ax' + by'$ на $d$:

$$ax' + by' = dq + r = (ax + by)q + r \Leftrightarrow (x' - xq)a + (y' - yq)b = r.$$

В останній рівності ліва і права частини належать до множини $I(a,b)$, де $r = 0$ або $g(r) < g(d)$. Остання нерівність суперечить означенню (18). Таким чином, $r = 0$, і справджується рівність (19).

$$a = a \cdot 1 + b \cdot 0; \qquad b = a \cdot 0 + b \cdot 1; \qquad a, b \in I(a,b).$$

Згідно з (19), маємо: $d$ — спільний дільник $a$ та $b$. Водночас спільний дільник $a$ та $b$ обов'язково є дільником $d$:

$$\begin{cases} a = a'q \\ b = b'q \end{cases} \Rightarrow d = ax + by = (a'x + b'y)q \,\vdots\, q.$$

Отже, $d$ — найбільший спільний дільник $a$ і $b$.

## 4.6. Алгоритм Евкліда

**Означення 34.** *Однакову остачу від ділення на $c$ мають $a$ і $b$, якщо різниця $a$ і $b$ ділиться на $c$ без остачі:*

$$a \overset{c}{\equiv} b \;\Leftrightarrow\; (a - b) \,\vdots\, c \;\Leftrightarrow\; (\exists\, q \quad a - b = cq). \tag{20}$$

Існує еквівалентна форма запису співвідношення (20): $a = b \pmod{c}$.

**Теорема 15.** *Якщо $a$ і $b$ мають однакову остачу при діленні на $c$, то* НСД$(a,c) =$ НСД$(b,c)$.

**Доведення.** З означення найбільшого спільного дільника маємо:

$$\left.\begin{array}{r} a=(b+cq) \vdots \text{ НСД}(b,c) \\ c \vdots \text{ НСД}(b,c) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ НСД}(a,c) \vdots \text{ НСД}(b,c);$$

$$\left.\begin{array}{r} b=(a-cq) \vdots \text{ НСД}(a,c) \\ c \vdots \text{ НСД}(a,c) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ НСД}(b,c) \vdots \text{ НСД}(a,c).$$

Отже, існують такі $k, l \in \mathbb{K}$, при яких отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l} \text{НСД}(a,c) = k \text{ НСД}(b,c) \\ \text{НСД}(b,c) = l \text{ НСД}(a,c) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-kl) \text{ НСД}(a,c) = 0 \\ (1-kl) \text{ НСД}(b,c) = 0 \end{array}\right. .$$

Кільце $\mathbb{K}$ не містить дільників нуля, тому маємо: $kl = 1$. Врахувавши те, що:

- у кільці цілих чисел невід'ємність $k$ і $l$;
- у кільці многочленів старші коефіцієнти $k$ та $l$ дорівнюють 1, а степінь добутку многочленів є сумою степенів співмножників,

отримаємо: $k = l = 1$.

**Наслідок 5 (алгоритм Евкліда).** *Нехай* $\{a_n\}$ *— така послідовність елементів евклідового кільця, в якій* $a_{n+1}$ *— остача від ділення* $a_{n-1}$ *на* $a_n$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$ *Згідно з означенням евклідового кільця, маємо:* $a_{n+1} = 0 \ \vee \ g(a_{n+1}) < g(a_n)$, *де* $g$ *— евклідова норма кільця, що набуває натуральних значень. Через це існує таке натуральне* $k$, *при якому* $a_k \neq 0$, $a_{k+1} = 0$. *Тоді маємо:*

$$\begin{array}{rcl} \text{НСД}(a_0,a_1) &=& \text{НСД}(a_1,a_2) = \text{НСД}(a_2,a_3) = \cdots = \\ &=& \text{НСД}(a_k,a_{k+1}) = \text{НСД}(a_k,0) = a_k. \end{array}$$

Наприклад, зі співвідношень
$$\begin{array}{rcl} 8827 &=& 2\cdot 4171 + 485, \\ 4171 &=& 8\cdot 485 + 291, \\ 485 &=& 291 + 194, \\ 291 &=& 194 + 97, \\ 194 &=& 2\cdot 97 \end{array}$$
випливає така рівність: $\text{НСД}(8827, 4171) = 97$.

## 4.7. Властивості відношення подільності

**Означення 35.** *Взаємно простими є $a$ і $b$, якщо їхній найбільший спільний дільник дорівнює одиниці:* НСД$(a,b) = 1$, *тобто коли існують такі $x$ та $y$, при яких $ax+by=1$.*

**Теорема 16.** *Якщо $a$ та $b$ взаємно прості з $c$, то добуток $ab$ також взаємно простий з $c$:*

$$\text{НСД}(a,c) = \text{НСД}(b,c) = 1 \ \Rightarrow\ \text{НСД}(ab,c) = 1.$$

**Доведення.** Згідно з умовою, існують такі $x, y, z, t$, при яких:

$$\begin{cases} ax+cy=1 \\ bz+ct=1 \end{cases} \Rightarrow (ax+cy)(bz+ct) = (ab)(xz) + c(ybz+yct+axt) = 1,$$

звідси маємо: НСД$(ab,c) = 1$.

**Теорема 17.** *Якщо $ab$ ділиться без остачі на $c$, що взаємно просте з $a$, то $b$ ділиться без остачі на $c$:*

$$\begin{cases} \text{НСД}(a,c) = 1 \\ ab \,\vdots\, c \end{cases} \Rightarrow b \,\vdots\, c.$$

**Доведення.** Згідно з умовою, існують такі $x, y, z$, при яких:

$$\begin{cases} ax+cy=1 \\ ab=cz \end{cases} \Rightarrow b = b(ax+cy) = czx + bcy = c(zx+by) \,\vdots\, c.$$

**Теорема 18.** *Якщо $c$ ділиться на $a$ і $b$, що взаємно прості, то $c$ ділиться й на добуток $ab$:*

$$\begin{cases} c \,\vdots\, a \\ c \,\vdots\, b \\ \text{НСД}(a,b) = 1 \end{cases} \Rightarrow c \,\vdots\, ab.$$

**Доведення.** Згідно з умовою, існують такі $x, y, z, t$, при яких:

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ c=az=bt \end{cases} \Rightarrow c = cax + cby = btax + azby = (xt+yz)ab \,\vdots\, ab.$$

## 4.8. Раціональні корені многочлена

Доведемо теорему, що дає змогу знаходити всі раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами шляхом перебору скінченної кількості варіантів.

**Теорема 19.** *Якщо нескоротний дріб*[1] $p/q$ *— корінь многочлена n-го степеня (15) з цілими коефіцієнтами, то чисельник* $p$ *— дільник вільного члена* $a_0$*, а знаменник* $q$ *— дільник старшого коефіцієнта* $a_n$.

**Доведення.** Припустимо, що

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0, \end{aligned}$$

тоді: $a_np^n = -q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\right) \,\vdots\, q;$

$$a_0q^n = -p\left(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1q^{n-1}\right) \,\vdots\, p.$$

Твердження теореми випливає із взаємної простоти $p$ та $q$ (див. властивості подільності цілих чисел).

**Наслідок 6.** *Для многочлена з цілими коефіцієнтами справджуються такі твердження:*

- *цілий корінь — дільник вільного члена;*
- *раціональний корінь многочлена зі старшим коефіцієнтом 1 — ціле число.*

**Лема 2.** *Якщо* $p$ *і* $q$ *— взаємно прості цілі числа, то для довільного цілого* $m$ *числа* $p + mq$ *та* $q$ *— взаємно прості.*

**Доведення.** Для довільного цілого $m$ з взаємної простоти $p$ і $q$ випливає існування таких цілих $a$ та $b$, при яких:

$$1 = ap + bq = a(p + mq) + (b - am)q = \text{НСД}(p + mq, q).$$

---

[1] Тобто чисельник $p$ та знаменник $q$ взаємно прості: НСД$(p, q) = 1$.

**Теорема 20.** *Якщо нескоротний дріб $p/q$ — корінь многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, $m$ — довільне ціле, то $f(m) \vdots (p - mq)$.*

**Доведення.** $f(m)$ дорівнює $f(m) - f\left(\frac{p}{q}\right)$, тобто

$$a_n\left(m^n - \frac{p^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\left(m^{n-1} - \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + a_1\left(m - \frac{p}{q}\right),$$

тому $q^n f(m)$ дорівнює:

$$a_n(m^n q^n - p^n) + a_{n-1}q(m^{n-1}q^{n-1} - p^{n-1}) + \cdots + a_1 q^{n-1}(mq - p),$$

що кратне $p - mq$, бо

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Твердження теореми випливає із взаємної простоти $q$ і $p - mq$.

Ця теорема дає змогу значно зменшити об'єм обчислень у визначенні всіх раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами. Перед обчисленням значення многочлена для різних аргументів $p/q$ шляхом знаходження остачі від ділення на $(x - p/q)$ доцільно обчислити значення многочлена для $x = m$ — цілого і використати доведену теорему (про необхідну умову) для звуження множини нескоротних дробів, що можуть бути коренями многочлена.

**Задача 5.** *Знайти x, якщо* $12x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 41x - 10 = 0.$

**Розв'язання.** Позначимо ліву частину рівняння через $f(x)$.

$\{1, 2, 5, 10\}$ — множина всіх натуральних дільників вільного члена $f(x)$;

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ — множина всіх натуральних дільників старшого коефіцієнта $f(x)$.

Раціональні корені рівняння будемо шукати серед дробів:

$$\begin{array}{llll} \pm1, & \pm2, & \pm5, & \pm10, \\ \pm1/2, & & \pm5/2, & \\ \pm1/3, & \pm2/3, & \pm5/3, & \pm10/3, \\ \pm1/4, & & \pm5/4, & \\ \pm1/6, & & \pm5/6, & \\ \pm1/12 & & \pm5/12. & \end{array} \tag{21}$$

Обчислимо $f(1)$, використовуючи схему Горнера.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | $-8$ | $-41$ | 41 | $-10$ |
| 1 | 12 | 4 | $-37$ | 4 | $-6$ |

Для нескоротного дробу $p/q$, що є коренем рівняння, $(p-q)$ — дільник $f(1) = -6$, тобто одне з чисел $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$, $\pm6$. Ця умова справджується лише для таких раціональних чисел з набору (21):

$$\begin{array}{lll} -1, & \pm2, & -5, \\ \pm1/2, & & +5/2, \\ +1/3, & +2/3, & +5/3, \\ +1/4, & & +5/4, \\ & & +5/6. \end{array} \tag{22}$$

Обчислимо $f(-1)$ за допомогою схеми Горнера.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | $-8$ | $-41$ | 41 | $-10$ |
| $-1$ | 12 | $-20$ | $-21$ | 62 | $-72$ |

Для нескоротного дробу $p/q$, що є коренем рівняння, $(p+q)$ — дільник $f(-1) = -72$. Ця умова справджується лише для таких раціональних чисел з набору (22): $\pm1/2$, $1/3$, $\pm2$, $-5$, $5/3$, $5/4$. Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | $-8$ | $-41$ | 41 | $-10$ |
| 2 | 12 | 16 | $-9$ | 23 | 36 |

Для нескоротного дробу $p/q$, що є коренем рівняння, $(p-2q)$ — дільник $f(2) = 36$. Через це можливі раціональні корені рівняння потрібно шукати серед таких чисел: $1/2$, $-2$, $5/3$, $5/4$. Використовуючи схему Горнера, поділимо $f(x)$ на $(x - 1/2)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | $-8$ | $-41$ | 41 | $-10$ |
| $1/2$ | 12 | $-2$ | $-42$ | 20 | 0 |
| $1/2$ | 12 | 4 | $-40$ | 0 | |
| $1/2$ | 12 | 10 | $-35$ | | |

Якби многочлен $(x - 1/2)$ не виявився дільником $f(x)$, то ділили б $f(x)$ по черзі на $(x+2)$, $(x - 5/3)$, $(x - 5/4)$. Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^3 - 2x^2 - 42x - 20) = \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (12x^2 + 4x - 40) = (2x-1)^2(3x^2 + x - 10). \end{aligned}$$

Поділимо $(3x^2 + x - 10)$ на $(x+2)$: $\begin{array}{|c|c|r|r|}\hline & 3 & 1 & -10 \\ \hline -2 & 3 & -5 & 0 \\ \hline \end{array}$.

У результаті маємо розклад: $f(x) = (2x-1)^2(x+2)(3x-5)$.
**Відповідь.** $-2$, $3/5$, $1/2$ (останній корінь має кратність 2).

## 4.9. Найменше спільне кратне

**Означення 36.** *Найменшим спільним кратним $a$ та $b$ є $p$ (записують так: $p = \text{НСК}(a,b)$), якщо:*

- $p \,\vdots\, a \ \wedge\ p \,\vdots\, b$ *— $p$ є спільним кратним $a$ та $b$;*
- $(q \,\vdots\, a \ \wedge\ q \,\vdots\, b) \ \Rightarrow\ q \,\vdots\, p$ *— всі спільні кратні $a$ і $b$ кратні $p$.*

**Теорема 21.** *Якщо хоча б один з двох елементів евклідового кільця відмінний від нуля, то їхнє найменше спільне кратне дорівнює відношенню їхнього добутку до їхнього найбільшого спільного дільника:* $\text{НСД}(a,b) \neq 0 \Rightarrow \text{НСК}(a,b) = ab/\text{НСД}(a,b)$.

**Доведення.** Позначимо через $d$ найбільший спільний дільник $a$ і $b$, через $a'$ та $b'$ — такі взаємно прості елементи кільця, що $a = a'd$, $b = b'd$. Відношення $ab/\text{НСД}(a,b) = a'b'd = ab' = a'b$ є спільним кратним $a$ та $b$. Нехай $q = xa = yb$ — довільне спільне кратне $a$ і $b$, тоді: $q/d = q' = xa' = yb'$ — спільне кратне $a'$ та $b'$. З теореми 18 випливає, що $q'$ — кратне добутку $a'b'$, тому $q = dq'$ — кратне добутку $a'b'd$.

## 4.10. Розкладання на прості множники

**Означення 37.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Елементи евклідового кільця, добуток яких дорівнює 1, називають дільниками одиниці.*
2. *Елемент евклідового кільця — простий (нерозкладний), якщо він кратний тільки дільникам одиниці і добуткам останніх з ним самим.*

У кільці цілих чисел дільниками одиниці є $\pm 1$, а в кільці многочленів над полем — елементи цього поля, відмінні від нуля.

**Зауваження 11.** *Для єдиності розкладання на прості множники до простих елементів кільця висувають додаткову вимогу:*

- *у кільці цілих чисел просте число більше, ніж 1;*
- *у кільці многочленів коефіцієнт старшого степеня нерозкладного многочлена дорівнює 1.*

*Многочлени 1-го степеня — нерозкладні у кільці многочленів над будь-яким полем.*

**Теорема 22.** *Множина простих елементів евклідового кільця — нескінченна.*

**Доведення** (від супротивного). Припустимо, що $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — всі різні прості елементи евклідового кільця. Тоді всі елементи, відмінні від дільників одиниці, кратні хоча б одному з елементів $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Проте $(p_1 p_2 \cdots p_n + 1)$ — взаємно просте з усіма цими елементами. Отримана суперечність засвідчує хибність припущення про скінченність множини простих елементів.

**Теорема 23.** *Довільне натуральне $n > 1$ можна подати у вигляді добутку простих чисел.*

**Доведення** (методом математичної індукції за $n$)

1. 2 — просте число, тому $2 = 2$ — шукане подання для $n = 2$.
2. Припустимо, що твердження теореми справджується для всіх $n \leq k$. Доведемо, що воно справджується і для $n = k + 1$. Можливі два випадки:
   - $n = (k + 1)$ — просте. У даному разі $n = n$ є шуканим розкладанням на множники;
   - $n = (k + 1)$ не є простим, тобто існують такі натуральні $j$ та $l$, при яких $n = k + 1 = jl$, $j \geq 2$, $l \geq 2$. З останніх співвідношень випливає, що $j$ та $l$ не перевищують $(k + 1)/2$ і $k$. Таким чином, для $j$ і $l$ розкладення на прості множники існують. Перемноживши відповідні подання, отримаємо розкладення на множники для $(k + 1)$.

3. Таким чином, якщо твердження теореми справджується для всіх натуральних $n$, що не перевищують $k$, то воно справджується і для всіх натуральних $n$, які не перевищують $(k+1)$. На підставі 5-ої аксіоми Пеано робимо висновок про істинність теореми.

**Теорема 24.** *Многочлен степеня більшого від 0, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, можна подати у вигляді добутку нерозкладних на множники (незвідних) многочленів.*

**Доведення** методом математичної індукції за степенем многочлена повністю відтворює доведення попередньої теореми (див. зауваження 11).

Аналогічну теорему можна довести методом математичної індукції за евклідовою нормою для довільного евклідового кільця, в якому множина простих елементів містить всі елементи кільця, евклідова норма яких найменша.

**Означення 38.** *Розкладення на прості множники називають канонічним, якщо їх записують у порядку неспадання евклідової норми.*

Наприклад, розкладення $21 = 3 \cdot 7$ — канонічне, а $21 = 7 \cdot 3$ — не канонічне.

**Зауваження 12.** *Натуральні числа збігаються тоді й лише тоді, коли збігаються їхні канонічні розкладення на прості множники.*

**Доведення** зводиться до аналізу можливості скорочення спільних множників канонічних розкладень на прості множники.

## 4.11. Кількість дільників натурального числа

**Теорема 25.** *Нехай канонічне розкладення на прості множники натурального числа $m$ має такий вигляд:*

$$m = a^{n_a} \cdot b^{n_b} \cdots c^{n_c}. \tag{23}$$

*Тоді кількість всіх різних натуральних дільників $m$ дорівнює:*

$$(n_a + 1) \cdot (n_b + 1) \cdots (n_c + 1). \tag{24}$$

**Доведення.** Всі натуральні дільники $m$ вичерпуються числами такого вигляду:

$$a^{j_a} \cdot b^{j_b} \cdots c^{j_c}, \tag{25}$$

де

$$0 \le j_a \le n_a, \qquad 0 \le j_b \le n_b, \qquad \ldots, \qquad 0 \le j_c \le n_c. \tag{26}$$

Кількість всіх різних добутків вигляду (25) є кількістю всіх різних можливих наборів $(j_a; j_b; \ldots; j_c)$, що задовольняють нерівності (26), тобто дорівнює добутку (24).

**Задача 6.** *Знайти всі натуральні числа, що діляться на 6 і мають 35 різних натуральних дільників.*

**Розв'язання.** $6 = 2 \cdot 3$, тому шукане число ділиться на прості числа 2 і 3. Нехай $2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot r^{n_r} \cdots s^{n_s}$ — канонічне розкладення на прості множники шуканого числа. Тоді, згідно з доведеною теоремою 25 та умовою задачі, маємо:

$$(n_2 + 1) \cdot (n_3 + 1) \cdot (n_r + 1) \cdots (n_s + 1) = 5 \cdot 7.$$

В останній рівності ліворуч перші два множники більші, ніж 1, а праворуч — добуток двох простих чисел. Отже, шукане число не має простих дільників, відмінних від 2 чи 3. Таким чином:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2 + 1 = 5 \\ n_3 + 1 = 7 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} n_2 + 1 = 7 \\ n_3 + 1 = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2 = 4 \\ n_3 = 6 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} n_2 = 6 \\ n_3 = 4 \end{cases} \end{array}\right. .$$

**Відповідь.** $2^4 \cdot 3^6$ або $2^6 \cdot 3^4$.

## 4.12. Функція Ейлера та її мультиплікативність

**Означення 39.** *Функція Ейлера натуральному $n$ ставить у відповідність кількість натуральних чисел, що менші, ніж $n$, і взаємно прості з ним:* $\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} | \quad k < n \ \wedge \ \text{НСД}(n, k) = 1\}|$.

**Лема 3.** *Якщо $p$ — просте натуральне, $k$ — натуральне, то*

$$\varphi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

**Доведення.** Серед $p^k$ чисел $\{1, 2, 3, \ \dots\ , p^k\}$ не є взаємно простими з $p^k$ лише ті, що кратні $p$. Таких чисел є: $p^k/p = p^{k-1}$. А взаємно простих з $p^k$ нараховується відповідно: $p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - 1/p\right)$.

**Теорема 26.** *Якщо $a$ і $b$ — взаємно прості натуральні числа, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$.*

**Доведення.** Для натурального $x < ab$ існує таке подання: $x = bq + r < ab$, де $0 \le q < a$, $0 \le r < b$. Якщо $x$ взаємно просте з $b$, то НСД$(x, b)$ = НСД$(r, b) = 1$, і $r$ може набирати лише одне з $\varphi(b)$ значень. Всі $a$ чисел $r$, $r + b$, ... , $r + (a-1)b$ мають різні остачі при діленні на $a$, бо $r + k_1 b \overset{a}{\equiv} r + k_2 b \Leftrightarrow (k_1 - k_2)b \overset{a}{\equiv} 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$, враховуючи взаємну простоту $a$ й $b$ та те, що $k_1$, $k_2$ лежать у межах від 0 до $a$. Серед цих чисел є рівно $\varphi(a)$, взаємно простих з $a$. Таким чином, $x$ взаємно просте з $ab$, якщо $r$ набирає одне з $\varphi(b)$ значень, а $q$ — одне з $\varphi(a)$ значень. Отже, таких чисел є: $\varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$, що й потрібно було довести.

**Наслідок 7.** *Якщо $p = \prod\limits_{j=1}^{n} p_j^{k_j}$ — канонічне розкладення[1] натурального $p$ на прості множники, то*

$$\varphi(p) = \varphi\left(\prod_{j=1}^{n} p_j^{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \varphi\left(p_j^{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{k_j}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = p\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

## 4.13. Класи еквівалентності остач

**Означення 40.** *Позначимо через $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\overset{p}{\equiv}$ множину класів еквівалентності цілих чисел, що мають однакову остачу при діленні на $p$.*

**Теорема 27.** *Класи еквівалентності остач суми й добутку залежать лише від класів еквівалентності доданків і співмножників:*

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_1 & \overset{p}{\equiv} & a_2 \\ b_1 & \overset{p}{\equiv} & b_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a_1 \pm b_1 & \overset{p}{\equiv} & a_2 \pm b_2 \\ a_1 b_1 & \overset{p}{\equiv} & a_2 b_2 \end{array}\right. .$$

[1] Для скороченого запису добутку виразів, кожен з яких залежить від натурального індексу, використовують позначення $\Pi$, під яким вказують початкове значення індексу (нижню межу) і над яким — кінцеве значення індексу (верхню межу).

**Доведення.** Твердження теореми випливає з імплікації:

$$\left\{\begin{array}{r} a_2 = a_1 + px \\ b_2 = b_1 + py \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_2 \pm b_2 & = & a_1 \pm b_1 + p(x \pm y) \\ a_2 b_2 & = & a_1 b_1 + p(a_1 y + b_1 x + pxy) \end{array}\right. .$$

Отже, $\mathbb{Z}_p$ — комутативне кільце, якщо суму (різницю, добуток) розуміти як клас еквівалентності, до якого належить сума (різниця, добуток) представників. Це кільце можна вкласти в поле тоді й лише тоді, коли в ньому відсутні дільники нуля, тобто коли $p$ — просте. В останньому випадку:

$$\forall\ k \in \{1, 2, ..., p-1\} \quad \exists\ x, y \in \mathbb{Z} \quad kx + py = 1 \Rightarrow kx \overset{p}{\equiv} 1,$$

тобто $\mathbb{Z}_p$ — поле для простого $p$. За обернений елемент до класу еквівалентності, до якого належить $k \in \{1, 2,\ \dots, p-1\}$, можна взяти клас, до якого належить $-(p-1)!/k$ (див. далі теорему Вільсона[1]).

## 4.14. Позиційна система числення

**Означення 41.** *Нехай $p > 1$ — деяке натуральне число. Цифрами в системі числення з основою p назвемо символи для позначення цілих чисел у межах від 0 до $(p-1)$ включно. Для цілих $m \geq 0$, $n \geq 0$ розглянемо $\alpha_0$, $\alpha_1$, ... , $\alpha_{n-1}$, $\alpha_n$, $\beta_1$, $\beta_2$, ... , $\beta_{m-1}$, $\beta_m$ — послідовності цифр (необов'язково різних) у системі числення з основою p, причому $\alpha_n \neq 0$ для $n > 0$. Вираз (запис)*

$$\pm(\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{m-1} \beta_m)_p$$

*називають скінченним дробом у системі числення з основою p, а його величина дорівнює:*

$$\pm\left(\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \cdots + \alpha_0 + \frac{\beta_1}{p} + \frac{\beta_2}{p^2} + \cdots + \frac{\beta_m}{p^m}\right),$$

*де знаки + чи − однакові в обох записах.*

*Якщо $p = 10$, то такий вираз називається скінченним десятковим дробом з $m$ цифрами після коми. За домовленістю, p — основа*

[1] Джон Вільсон (1741–1793) — англійський математик.

*числення — не вказується, якщо* $p = 10$. *У даному разі кома у записі скінченного дробу називається десятковою комою. У більшості країн замість коми використовують (десяткову) крапку.*

*Дроби називають рівними, якщо їхні величини рівні.*

*Для запису власне натуральних чисел використаємо такий запис:*

$$\alpha = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0}\ _p = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0, \qquad (27)$$

*який називають* $(n+1)$*-цифровим натуральним числом у системі числення з основою* $p$.

**Теорема 28.** *Нехай* $\alpha$ *і* $p$ *— натуральні числа, причому* $p > 1$. *Тоді існують такі* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *і послідовність* $\{\alpha_j\}_{j=0}^n$ *цілих чисел, кожне з яких лежить у межах від* $0$ *до* $(p-1)$ *включно, при яких справджуються рівності (27).*

**Доведення.** Згідно з біномною формулою, для довільного натурального $k > \alpha$ маємо:

$$\begin{aligned} p^k &= (1 + (p-1))^k = 1^k + C_k^1 (p-1) + \cdots + (p-1)^k > \\ &> 1 + k(p-1) \geq 1 + k > \alpha. \end{aligned} \qquad (28)$$

Спочатку (0-ий крок) знайдемо $\beta_0$ і $\alpha_0$ — відповідно частку й остачу від ділення $\alpha$ на $p$ ($\alpha = \beta_0 p + \alpha_0$), причому $\beta_0 < p^{\alpha-1}$, згідно з нерівністю (28).

Далі (1-ий крок), якщо $\beta_0 = 0$, вибираємо $n = 0$, інакше знайдемо $\beta_1$ і $\alpha_1$ — відповідно частку й остачу від ділення $\beta_0$ на $p$. Маємо: $\beta_0 = \beta_1 p + \alpha_1$, причому $\beta_1 < p^{\alpha-2}$, бо $\beta_0 < p^{\alpha-1}$...

На $(k+1)$-му кроці, якщо $\beta_k = 0$, вибираємо $n = k$, інакше знайдемо $\beta_{k+1}$ і $\alpha_{k+1}$ — відповідно частку й остачу від ділення $\beta_k$ на $p$ ($\beta_k = \beta_{k+1} p + \alpha_{k+1}$), причому $\beta_{k+1} < p^{\alpha-k-2}$, бо $\beta_k < p^{\alpha-k-1}$.

Виконуючи таким чином ділення з остачею на основу числення $p$, ми за скінченну кількість кроків отримаємо ділення без остачі, тобто подання (27).

## 4.15. Ознаки подільності на 2, 3, ... , 13

Ознака подільності натурального числа $\alpha$ на натуральне число $k$ — твердження, що залежить від цифр запису (27), і перевірка істинності якого, особливо для великих $\alpha$, потребує менше обчислень, ніж безпосереднє ділення з остачею $\alpha$ на $k$. Ознаки подільності різні в різних системах числення. Подамо деякі ознаки подільності у десятковій системі числення.

**Теорема 29.** *Натуральне число* $\alpha = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0}$ *ділиться без остачі на:*

- 2, *якщо* $\alpha_0 \vdots 2$ — *остання цифра десяткового запису* $\alpha$ *парна;*
- 3, *якщо* $(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0) \vdots 3$ — *сума цифр десяткового запису* $\alpha$ *ділиться без остачі на* 3;
- 4, *якщо* $\overline{\alpha_1 \alpha_0} \vdots 4$ — *число, утворене двома останніми цифрами десяткового запису* $\alpha$, *ділиться без остачі на 4;*
- 5, *якщо* $\alpha_0 = 0$ *або* $\alpha_0 = 5$ — *остання цифра десяткового запису* $\alpha$ *дорівнює* 0 *або* 5;
- 6, *якщо воно ділиться без остачі на* 2 *і на* 3;
- 7, *якщо знакозмінна сума трицифрових чисел:*

$$\overline{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} - \overline{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_3} + \overline{\alpha_8 \alpha_7 \alpha_6} - \overline{\alpha_{11} \alpha_{10} \alpha_9} + \cdots \quad - \tag{29}$$

  *ділиться без остачі на* 7;
- 8, *якщо* $\overline{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} \vdots 8$ — *число, утворене трьома останніми цифрами десяткового запису* $\alpha$, *ділиться без остачі на* 8;
- 9, *якщо* $(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0) \vdots 9$ — *сума цифр десяткового запису* $\alpha$ *ділиться без остачі на* 9;
- 10, *якщо* $\alpha_0 = 0$ — *остання цифра десяткового запису* $\alpha$ *дорівнює нулю;*
- 11, *якщо* $(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots) \vdots 11$ — *знакозмінна сума цифр ділиться без остачі на* 11;
- 12, *якщо воно ділиться без остачі на* 3 *і* 4;

- 13, *якщо число (29) ділиться без остачі на* 13.

**Доведення.** Теорема — наслідок вже доведеної теореми 27. Справді, якщо $k$ — дільник 10, то матимемо:

$$10 \overset{k}{\equiv} 0 \Rightarrow \alpha = 10 \cdot \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_2 \alpha_1} + \alpha_0 \overset{k}{\equiv} \alpha_0.$$

Звідси випливають ознаки подільності на 2, 5 і 10.

Якщо $k = 3$ або $k = 9$, то $10 = 9 + 1 \overset{k}{\equiv} 1$, тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot 10^1 + \alpha_0 \overset{k}{\equiv} \\ &\overset{k}{\equiv} \alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0. \end{aligned}$$

З розкладення $100 = 4 \cdot 25$ маємо:

$$\alpha = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0} = 100 \cdot \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_3 \alpha_2} + \overline{\alpha_1 \alpha_0} \overset{4}{\equiv} \overline{\alpha_1 \alpha_0}.$$

Аналогічно, з розкладення $1000 = 8 \cdot 125$ випливає, що

$$\alpha = 1000 \cdot \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_4 \alpha_3} + \overline{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} \overset{8}{\equiv} \overline{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_0}.$$

Ознака подільності на 6 випливає з простоти чисел 2 та 3 (див. теорему 18).

Для доведення ознаки подільності на 7 та 13 потрібно зауважити, що для $k = 7$ або $k = 13$ матимемо:

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow 10^3 = 1000 = 1001 - 1 \overset{k}{\equiv} -1.$$

У даному разі

$$\begin{aligned} \alpha &= \overline{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} + 10^3 \cdot \overline{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_3} + 10^6 \cdot \overline{\alpha_8 \alpha_7 \alpha_6} + \cdots \overset{k}{\equiv} \\ &\overset{k}{\equiv} \overline{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} + (-1)^3 \cdot \overline{\alpha_5 \alpha_4 \alpha_3} + (-1)^6 \cdot \overline{\alpha_8 \alpha_7 \alpha_6} + \cdots. \end{aligned}$$

Звідси випливають ознаки подільності на 7 та 13.

$10 = 11 - 1 \overset{11}{\equiv} -1$, тому отримаємо:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0 \overset{11}{\equiv} \\ &\overset{11}{\equiv} \alpha_n \cdot (-1)^n + \alpha_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot (-1) + \alpha_0. \end{aligned}$$

Звідси випливає ознака подільності на 11.

## 4.16. Відновлення запису дії додавання

Подамо приклад широкого класу задач логічного характеру, в яких явно використовують правила виконання арифметичних дій у позиційних системах числення. Перебір *всіх* взаємно однозначних відображень множини цифр у множину використаних літер (символів) у таких задачах неможливий без використання ЕОМ, а з ЕОМ це призводить до неефективного використання обчислювальної техніки. З огляду на це розв'язання вказаного класу задач потребує *оптимізації* [1] перебору.

**Задача 7.** *Дешифрувати запис у десятковій системі числення дії додавання:* $ten + ten + forty = sixty$, *в якому однакові цифри позначено однаковими літерами.*

**Розв'язання.** Будь-яка цифра за величиною не перевищує 9, а її добуток на 2 не перевищує 18, що менше, ніж 20. З аналізу цифр розряду одиниць маємо:

$$\left[\begin{array}{l} n+n+y=y \\ n+n+y=y+10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=5 \end{array}\right. .$$

Якщо $n=5$, то з розряду одиниць один десяток перейде у розряд десятків. З аналізу цифр розряду десятків отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} e+e+t=t \\ e+e+t=t+10 \\ e+e+t+1=t \\ e+e+t+1=t+10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} e=0 \\ e=5 \end{array}\right. .$$

У записаній сукупності чотирьох рівностей не справджуються третя та четверта, що відповідають тому випадку, коли з розряду одиниць суми переходить один десяток, тобто коли $n=5$. Отже, $n=0$, $e=5$, а запис набирає такого вигляду:

$$\begin{array}{rccccc} & & & t & 5 & 0 \\ + & & & t & 5 & 0 \\ & f & o & r & t & y \\ \hline & s & i & x & t & y \end{array} .$$

[1] Оптимізація (з латинської *optimus* — "найліпший") — поліпшення, процес надання будь-чому найвигідніших характеристик чи співвідношень.

Очевидно, що $f \leq 8$, $s = f + 1$. Для довільного натурального $k$ в процесі додавання $k$ чисел “у стовпчик” у наступний розряд кожного разу переносять не більше $(k-1)$-ої одиниці. Звідси маємо:

$$\begin{cases} o \in \{1,2,3,4,6,7,8,9\} \\ i \in \{1,2,3,4,6,7,8,9\} \\ o+1 = 10+i \ \vee \ o+2 = 10+i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} o = 9 \\ i = 1 \\ o+2 = 10+i \end{cases}.$$

Таким чином, з розряду сотень має бути перенесено 2 тисячі. Запис набирає такого вигляду:

$$\begin{array}{rccccc} & & & t & 5 & 0 \\ + & & & t & 5 & 0 \\ & f & 9 & r & t & y \\ \hline & s & 1 & x & t & y \end{array}.$$

Для літер $t$, $r$, $f$, $y$ залишилися цифри 2, 3, 4, 6, 7, 8, причому $s = f + 1$, а $x$ однозначно визначається для відомих $t$ і $r$, причому $x \geq 2$, бо $n = 0$ і $i = 1$.

З аналізу цифр третього розряду, враховуючи, що в розряд тисяч має бути перенесено 2 тисячі, отримаємо:

$$x + 20 = 2t + r + 1. \tag{30}$$

Очевидно, що $2 \leq x \Rightarrow 22 \leq x + 20$, $r \leq 8 \Rightarrow 2t + r + 1 \leq 2t + 9$. Враховуючи рівність (30), маємо:

$$22 \leq 2t + 9 \Rightarrow 13 \leq 2t \Rightarrow 6,5 \leq t. \Rightarrow t \in \{7, 8\}.$$

$$22 \leq x + 20 = 2t + r + 1 \leq 17 + r.$$

Звідси матимемо: $5 \leq r$. Проте $n = 5$, тому $6 \leq r \leq 8$.

Якщо $t = 7$ і $r = 6$, то $x = 1$, що суперечить $i = 1$.

Якщо $t = 7$ і $r = 8$, то $x = 3$. В наборі цифр $\{2, 4, 6\}$, що залишилися не використаними, нема таких $s$ і $f$, при яких $s = f + 1$.

Якщо $t = 8$ і $r = 6$, то $x = 3$. В наборі цифр $\{2, 4, 7\}$, що залишилися не використаними, нема таких $s$ і $f$, при яких $s = f + 1$.

Якщо $t = 8$ і $r = 7$, то $x = 4$. З набору цифр $\{2, 3, 6\}$, що залишилися не використаними, єдиним способом можна вибрати такі $s$ і $f$, при яких $s = f + 1$. У результаті маємо: $f = 2$, $s = 3$, $y = 6$.

**Відповідь.** $850 + 850 + 29786 = 31486$.

За допомогою міркувань, аналогічних до поданих, можна дешифрувати запис виконання інших арифметичних дій і в недесяткових системах числення.

## 4.17. Теорема Ейлера

**Теорема 30.** *Якщо $a$ та $m$ взаємно прості, то $a^{\varphi(m)}$ має остачу 1 при діленні на $m$:*

$$\text{НСД}\,(a,m)=1 \;\Rightarrow\; a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1.$$

**Доведення.** Нехай $a_1$, $a_2$, $a_3$,..., $a_{\varphi(m)}$ — *різні* натуральні взаємно прості з $m$ числа, що менші за $m$. Тоді числа $a_1a$, $a_2a$, $a_3a$, ... , $a_{\varphi(m)}a$ також взаємно прості з $m$ і мають різні остачі при діленні на $m$, бо

$$a_ja \overset{m}{\equiv} a_ka \;\Leftrightarrow\; (a_j-a_k)a \overset{m}{\equiv} 0 \;\Leftrightarrow\; a_j \overset{m}{\equiv} a_k \;\Leftrightarrow\; a_j=a_k.$$

$$\prod_{j=1}^{\varphi(m)} a_j \overset{m}{\equiv} a^{\varphi(m)} \prod_{j=1}^{\varphi(m)} a_j \;\Leftrightarrow\; (a^{\varphi(m)}-1) \prod_{j=1}^{\varphi(m)} a_j \overset{m}{\equiv} 0 \;\Leftrightarrow\; a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1.$$

**Наслідок 8 (мала теорема Ферма).**[1] *Якщо $p$ — просте, яке взаємно просте з $a$, то $a^{p-1}$ має остачу 1 при діленні на $p$: $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.*

## 4.18. Теорема Вільсона

**Лема 4.** *Нехай $p$ — просте, $a_n \overset{p}{\not\equiv} 0$. Тоді рівняння:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx^j \overset{p}{\equiv} 0 \quad —$$

*має не більше, ніж $n$, різних* $(\mathrm{mod}\ p)$ *коренів.*

**Доведення** (індукцією за $n$). Нехай $a_0+a_1x \overset{p}{\equiv} 0$, причому НСД$(a_1,p)=1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, z,t \quad a_1z+pt=1$. Маємо:

$$za_0+za_1x = za_0+(1-pt)x \overset{p}{\equiv} za_0+x \overset{p}{\equiv} 0 \;\Rightarrow\; x \overset{p}{\equiv} -za_0,$$

тобто твердження леми справджується для $n=1$.

[1] П'єр Ферма́ (1601–1665) — французький математик.

Нехай твердження леми справджується для натурального $n$, $x_1$ — розв'язок такого рівняння:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j x^j \overset{p}{\equiv} 0,$$

де $a_{n+1} \overset{p}{\not\equiv} 0$. Поділимо многочлен $f(x)$ з остачею на $x - x_1$:

$$f(x) = q(x)\ (x - x_1) + r,$$

де $q(x)$ — многочлен степеня $n$, старший коефіцієнт якого дорівнює $a_{n+1}$. Тоді $f(x_1) = r \overset{p}{\equiv} 0$. В результаті отримаємо:

$$f(x) \overset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow (x \overset{p}{\equiv} x_1 \vee q(x) \overset{p}{\equiv} 0).$$

Згідно з припущенням, рівняння $q(x) \overset{p}{\equiv} 0$ має не більше $n$ різних $(\mathrm{mod}\ p)$ коренів, тому рівняння $f(x) \overset{p}{\equiv} 0$ має не більше $(n+1)$-го кореня з різними остачами від ділення на $p$.

**Теорема 31.** *Якщо $p$ — просте, то* $(p-1)! + 1 \overset{p}{\equiv} 0$.

**Доведення.** Ліва частина рівності:

$$\prod_{j=1}^{p-1}(x - j) - \left(x^{p-1} - 1\right) \overset{p}{\equiv} 0 \quad — \tag{31}$$

є многочленом змінної $x$, степінь якого не перевищує $(p-2)$. Якщо змінна $x$ дорівнює натуральному числу в межах від 1 до $(p-1)$ включно, то, згідно з малою теоремою Ферма, маємо: $x^{p-1} - 1 \overset{p}{\equiv} 0$. У цьому разі $(x = 1, 2, \dots, p-1)$ ліва частина рівняння (31) ділиться без остачі на $p$. Отже, згідно з доведеною лемою, всі коефіцієнти рівняння (31) діляться без остачі на $p$, у тому числі й вільний член:

$$(-1)^{p-1}(p-1)! + 1 \overset{p}{\equiv} 0. \tag{32}$$

Для $p = 2$ теорема справджується: $1! + 1 \overset{2}{\equiv} 0$.

Для $p > 2$ $\ (p-1) \vdots 2$, тому співвідношення (32) набирає такого вигляду: $(p-1)! + 1 \overset{p}{\equiv} 0$.

# Розділ 5. Дійсні числа

## 5.1. Нескінченні десяткові дроби

**Теорема 32.** *Нема раціонального числа, квадрат якого дорівнює* 2.

**Доведення** (від супротивного). Нехай існують такі взаємно прості ціле $m$ і натуральне $n$, при яких маємо: $m^2/n^2 = 2$, тобто $m^2 = 2n^2$. З останньої рівності випливає, що $m$ — парне, тобто існує таке ціле $p$, при якиму $m = 2p$. Тоді отримаємо: $4p^2 = 2n^2$, звідси: $n^2 = 2p^2$. Тому й $n$ — парне, що суперечить нескоротності дробу $m/n$.

Таким чином, обмежившись розглядом тільки раціональних чисел, ми не завжди маємо змогу знайти корінь натурального степеня — здійснити операцію, обернену до піднесення до степеня. Саме потреба у математичній теорії, в якій ця дія, як і багато інших, визначена та має результат хоча б для додатних чисел, зумовлює необхіднісь розгляду дійсних чисел. Запропоноване нижче означення дійсних чисел як нескінченних (вправо) десяткових дробів не єдино можливий спосіб означення дійсних чисел, але всі способи запровадження дійсних чисел еквівалентні. Основа системи числення може бути відмінною від 10.

**Означення 42.** *Нескінченний десятковий дріб — нескінченна послідовність цифр, записана у вигляді:* $\pm\alpha_n...\alpha_2\alpha_1\alpha_0, \beta_1\beta_2\beta_3...$ . *При цьому потрібно вживати лише один зі знаків + чи −. У поданому вище виразі члени послідовностей* $\{\alpha_j\}_{j=0}^{n}$, $\{\beta_j\}_{j=0}^{+\infty}$ *належать до множини* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\alpha_n \neq 0$, *якщо* $n > 0$.

*Нескінченний десятковий дріб називають періодичним, якщо існують такі натуральне* $m$ *та невід'ємне ціле* $k$, *при яких для довільного натурального* $n > k$ *маємо:* $\beta_{n+m} = \beta_n$. *Для періодичного десяткового дробу виберемо* $M$ *і* $K$ *— найменші з можливих значень* $m$ *і* $k$ *відповідно. Тоді вираз:* $\pm\alpha_n...\alpha_2\alpha_1\alpha_0, \beta_1...\beta_K(\beta_{K+1}...\beta_{K+M})$ *— форма запису такого дробу, в якому група цифр у круглих дужках називають періодом дробу, а* $M$ *— довжиною періоду.*

*Множину всіх скінченних і нескінченних десяткових дробів, у якій ототожнюють (вважають рівними) такі дроби:*

$+0,(0) = -0,(0)$, *які надалі позначатимемо* $0$;

$$\begin{aligned} \pm\alpha_n...\alpha_0,\beta_1...\beta_{k-1}\beta_k(9) &= \pm\alpha_n...\alpha_0,\beta_1...\beta_{k-1}\beta_k'(0) = \\ &= \pm\alpha_n...\alpha_0,\beta_1...\beta_{k-1}\beta_k' \ , \end{aligned} \qquad (33)$$

*де* $\beta_k \neq 9$, $\beta_k' = \beta_k + 1$, *а знаки* $+$ *чи* $-$ *вибирають однаковими для всіх частин рівностей (33), називають множиною дійсних чисел і позначають через* $\mathbb{R}$, *а її елементи називають дійсними числами.*

*Дійсне число, відмінне від* $0$, *у записі якого вжито знак плюс* $(+)$, *називають додатним, а в записі якого використано мінус* $(-)$ *— від'ємним. Якщо знак не вжито, то вважають, що записано додатне число (знак* $+$*). Дійсне число, що є додатним або дорівнює* $0$, *називають невід'ємним, а дійсне число, що є від'ємним або дорівнює* $0$, *— недодатним.*

*Для дійсного числа x означимо протилежне до нього дійсне число* $-x$ *як таке, запис якого можна отримати із запису x лише при заміні знака (*$+$ *на* $-$ *або навпаки).*

**Зауваження 13.** *При діленні цілого числа на натуральне* $q$ *можливі лише остачі* $0$, $1$, $2$, $\dots$ , $(q-1)$. *Подаючи дріб* $p/q$ *десятковим дробом і виконавши не більше, ніж* $(q+1)$, *ділень "у стовпчик" для знаходження цифр після коми, матимемо справу з повторенням хоча б однієї з уже отриманих остач (від ділення на* $q$*). Отже, продовжуючи далі ділити "у стовпчик" на q, отримаємо багатократне повторення певної групи цифр у поданні раціонального* $p/q$ *десятковим дробом. В результаті матимемо нескінченний періодичний дріб. Таким чином, будь-якому раціональному числу можна поставити у відповідність отриманий шляхом ділення "у стовпчик" періодичний десятковий дріб.*

Наприклад, $1/3 = 0,33333... = 0,(3)$.

## 5.2. Відношення порядку

**Означення 43.** *Означимо відношення порядку на* $\mathbb{R}$ *для дробів, що не мають періоду* $(9)$.

1. $\alpha_n...\alpha_0,\beta_1\beta_2... < \gamma_m...\gamma_0,\delta_1\delta_2...$ *(одне з додатних дійсних чисел менше, ніж інше), якщо* $\overline{\alpha_n...\alpha_0} < \overline{\gamma_m...\gamma_0}$ *(ціле число, утворене цифрами першого числа до десяткової коми, менше, ніж*

*відповідне ціле число, утворене цифрами другого числа до десяткової коми) або ж:*

$$\exists\ k \in \mathbb{N} \quad \overline{\alpha_n...\alpha_0\beta_1...\beta_{k-1}} = \overline{\gamma_m...\gamma_0\delta_1...\delta_{k-1}}\ \wedge\ \beta_k < \delta_k, \tag{34}$$

*тобто існує таке натуральне $k$, при якому $k$-та цифра після коми десяткового запису першого числа менша, ніж відповідна цифра у записі іншого числа, а всі попередні цифри в записах обох чисел рівні.*

2. *Будь-яке від'ємне дійсне число менше за нуль, що менший, ніж довільне додатне дійсне число.*

3. $x < y < 0 \Leftrightarrow 0 < -y < -x$.

*Означимо такі відношення: $>$, $\geq$, $\leq$ — більше, не менше, не перевищує. Отже, маємо:*

$$\begin{array}{lcl} a > b & \Leftrightarrow & b < a, \\ a \geq b & \Leftrightarrow & (a > b \vee a = b), \\ a \leq b & \Leftrightarrow & (a < b \vee a = b). \end{array}$$

**Зауваження 14.** *Умову (34) в останньому означенні можна замінити еквівалентною умовою:*

$$\exists\ k \in \mathbb{N} \quad \overline{\alpha_n...\alpha_0\beta_1...\beta_k} < \overline{\gamma_m...\gamma_0\delta_1...\delta_k}. \tag{35}$$

*З означення відношення порядку дійсних чисел випливає, що для довільних дійсних чисел $a$ та $b$:*

- *або $a = b$, або $a < b$, або $a > b$, причому справджується лише одне з цих трьох тверджень;*

- *якщо $a < b$, то існує таке дійсне $c$, при якому $a < c < b$.*

**Доведення.** Перше твердження — наслідок означень відношення порядку на множині натуральних чисел і запису натурального числа у довільній системі числення. Зауважимо: якщо нерівність справджується для якогось натурального $k = K$, то вона справджується і для всіх натуральних $k > K$.

Друге твердження — наслідок властивостей відношення порядку для натуральних чисел.

Третє твердження достатньо довести для додатних $a$ і $b$, десяткові записи яких $\alpha_n...\alpha_0, \beta_1\beta_2...$ та $\gamma_m...\gamma_0, \delta_1\delta_2...$ відповідно не мають періоду (9), тому задовольняють умову (35). Якщо різниця між правою і лівою частинами нерівності цієї умови більша, ніж 1, то достатньо припустити, що $c = (\overline{\alpha_n...\alpha_0\beta_1...\beta_k} + 1) : 10^k$.

Доведемо від супротивного, що ця різниця таки більша, ніж 1, для певного натурального $k$. Нехай $K$ — найменше з натуральних $k$, починаючи від якого така різниця дорівнює 1. Це можливо лише за умови: $\forall\ k > K \quad \beta_k = 0\ \wedge\ \delta_k = 9$, коли запис $a$ має період (9). Однак це суперечить припущенню про запис $a$ і $b$ без періоду (9).

**Означення 44.** *Запровадимо позначення для нових понять:*

1. $|x|$ *— абсолютна величина (модуль) дійсного числа* $x$ *— дорівнює* $x$ *для невід'ємних* $x$ *і* $-x$ *— для недодатних* $x$.

2. $\operatorname{sign} x$ *— знак дійсного числа* $x$ *— дорівнює* $1$ *для додатних* $x$, $-1$ *— для від'ємних,* $0$ *— для* $x = 0$. *Таким чином:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x > 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases} \qquad \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$$

$$x = \operatorname{sign} x \cdot |x|.$$

3. $[x]$ *— ціла частина числа* $x$ *— найбільше з цілих чисел, що не перевищують* $x$.

4. $\{x\}$ *— дробова частина числа* $x$ *— різниця числа* $x$ *та його цілої частини.*

Отже, $x = [x] + \{x\}$.

Наприклад, $[1,3] = 1$, $[-1,3] = -2$, $\{-1,3\} = 0,7$.

**Означення 45.** *Нехай* $a<b$ *— дійсні числа. Означимо за допомогою нерівностей такі числові множини:*

$(a; +\infty)$ *— множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $x > a$;
$[a; +\infty)$ *— множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $x \geq a$;
$(-\infty; a)$ *— множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $x < a$;
$(-\infty; a]$ *— множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $x \leq a$;
$(a; b)$ *— множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $a < x < b$;

$(a; b]$ — *множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $a < x \leq b$;
$[a; b)$ — *множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $a \leq x < b$;
$[a; b]$ — *множина всіх дійсних* $x$, *для яких* $a \leq x \leq b$,
$(-\infty; +\infty)$ — *множина всіх дійсних чисел.*

*Кожну з цих множин називають проміжком,* $[a; b]$ — *відрізком,* $(a; b)$ — *інтервалом*[1].

**Зауваження 15.** *Для позначення проміжків також використовують такі позначення:* $]a; b[ = (a; b)$, $]a; b] = (a; b]$ *і* $[a; b[ = [a; b)$, *де* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

**Означення 46.** *Числова пряма — пряма, на якій вибрано початкову точку $O$, певний напрям, що вважають додатним, і відрізок, довжину якого використовують як одиницю вимірювання довжини.*

Кожному дійсному числу ставиться у відповідність одна й лише одна точка числової прямої за таким правилом:

- числу 0 відповідає точка $O$;
- числу $x \neq 0$ відповідає точка $A_x$, розташована на відстані $|x|$ від точки $O$, причому для додатного $x$ рух від О до точки $A_x$ здійснюється у вибраному додатному напрямі, а для від'ємного $x$ — у протилежному напрямі.

Навпаки, кожній точці $A$ відповідає число $x_A$, абсолютна величина якого дорівнює довжині відрізка $OA$. Це число додатне, якщо напрям від $O$ до $A$ додатний, і від'ємне у протилежному випадку.

З огляду на це дійсні числа інколи називають точками числової прямої. При цьому абсолютна величина має просту геометричну інтерпретацію: $|a - b|$ — відстань між точками $a$ та $b$ числової прямої.

**Означення 47.** *Для дійсного $x$ скінченні десяткові дроби з $n$ знаками після десяткової коми $x_n^-$ і $x_n^+$ називають відповідно наближенням $x$ з точністю до $n$ знаків після коми з недостачею та надлишком, якщо $x_n^-$ — найбільший з десяткових дробів з $n$ знаками після коми, які не перевищують $x$, $x_n^+$ — найменший з десяткових дробів з $n$ знаками після коми, що більші, ніж $x$.*

[1] З латинської *intervallum* — "проміжок, відстань".

Наприклад, наближенням з точністю до двох знаків після коми з недостачею і надлишком числа:

- $-1,23456...$ є відповідно числа $-1,24$ і $-1,23$;
- $-1,23$ є відповідно числа $-1,23$ і $-1,22$.

Отже,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n^- \le x_{n+1}^- \le x < x_{n+1}^+ \le x_n^+ = x_n^- + 10^{-n}. \quad (36)$$

**Лема 5.** *Дійсне число $x$ менше, ніж дійсне $y$, тоді і лише тоді, коли існує таке наближення з надлишком числа $x$, яке менше за наближення з недостачею числа $y$ з тією самою кількістю знаків після коми:* $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \;\Leftrightarrow\; \exists\, K \in \mathbb{N} \quad x_K^+ < y_K^-$.

**Доведення.** Розглянемо невід'ємні дійсні числа $x = \alpha_n...\alpha_0, \beta_1\beta_2...$ і $y = \gamma_m...\gamma_0, \delta_1\delta_2...$ , у записах яких нема періоду (9). Якщо $x < y$, то існує таке натуральне $K$, при якому: $\overline{\alpha_n...\alpha_0\beta_1...\beta_K} < \overline{\gamma_m...\gamma_0\delta_1...\delta_K}$, причому різниця між правою та лівою частинами нерівності перевищує 1 (див. доведення зауваженння 14). Тоді отримаємо:

$$x_K^+ = x_K^- + 10^{-K} < \gamma_m...\gamma_0, \delta_1...\delta_K = y_K^-.$$

Поширення доведення на випадок від'ємних $x$, $y$ чи різних знаків очевидне. Достатність — безпосередній наслідок означення відношення порядку та наближень дійсного числа.

Для раціональних $x$, $y$ і відношення порядку дійсних чисел отримуємо:

$$0 < x < y \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

## 5.3. Незліченність дійсної прямої

**Теорема 33.** *Справджуються такі висловлювання щодо підмножин числової прямої.*

1. *Множина раціональних чисел — зліченна.*
2. *Множина дійсних чисел — незліченна.*

3. *Декартів добуток інтервалів* $(0;1)^n$ *рівнопотужний підмножині* $(0;1)$.

4. *Інтервал рівнопотужний числовій прямій.*

**Доведення**

1. Розташуємо всі дроби $p/q$ ($p$ — ціле, $q$ — натуральне) у вигляді нескінченної таблиці: у кожному рядку абсолютна величина чисельника стала і зростає на 1 при зсуві на 1 рядок вниз, у кожному стовпчику знаменник сталий і зростає на 1 при зсуві на 2 стовпчики праворуч.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 \rightarrow 1 & \rightarrow & -1 & & \frac{1}{2} & \rightarrow & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \cdots \\
2 & & -2 & & \frac{2}{2} & & -\frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & -\frac{2}{3} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \cdots \\
3 & & -3 & & \frac{3}{2} & & -\frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & -\frac{3}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \cdots \\
4 & & -4 & & \frac{4}{2} & & -\frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & -\frac{4}{3} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \cdots \\
5 & & -5 & & \frac{5}{2} & & -\frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & -\frac{5}{3} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Вкажемо стрілками порядок нумерації елементів таблиці. Раціональному числу — нескоротному дробу — поставимо у взаємно однозначну відповідність номер його першої появи для вказаного порядку обходу таблиці. Наприклад, $-3$ буде 9-им у такому переліку раціональних чисел, бо $\frac{2}{2} = 1$. Вказаний спосіб обходу таблиці можна використати для доведення зліченності зліченного об'єднання зліченних множин.

2. Припустимо, що множина дійсних чисел — зліченна, тобто існує можливість занумерувати її елементи. Утворимо таке додатне дійсне число $\varepsilon$ у межах від 0 до 1, при якому для довільного натурального $j$ $j$-а цифра після коми числа $\varepsilon$ відмінна від $j$-ої цифри $j$-го числа і від 9. За побудовою утворене дійсне число відмінне від усіх перелічених дійсних чисел. Виявлена суперечність вказує на те, що припущення про зліченність множини

дійсних чисел хибне. Використаний спосіб міркувань називають *діагональним методом Кантора*[1].

3. Для заданих значень: $\alpha^{(j)} = 0,\alpha_1^{(j)}\alpha_2^{(j)}\alpha_3^{(j)}... \in (0;1)$, де $j = 1$, 2, 3, ... , $n$ побудуємо:

$$\alpha = 0,\alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)}...\alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(3)}...\alpha_2^{(n)}\alpha_3^{(1)}... \in (0;1).$$

Вказане перетворення задає взаємно однозначну відповідність елементів $(0;1)^n$ та певної підмножини $(0;1)$. З іншого боку, елемент $(0;1)$, який має такий вигляд:

$$0,9\alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(3)}...\alpha_1^{(n)}9\alpha_2^{(2)}\alpha_2^{(3)}...\alpha_2^{(n)}9... ,$$

неможливо отримати вказаним способом.

4. Взаємно однозначна відповідність між точками прямої та півкола без крайніх точок встановлюється за допомогою центральної проекції, центр якої — центр півкола, на пряму, паралельну діаметру, що обмежує півколо. Взаємно однозначна відповідність між точками півкола та його діаметра задається ортогональною проекцією півкола на діаметр. Отже, існує взаємно однозначна відповідність між прямою й інтервалом (у даному разі — діаметром без крайніх точок) (див. рис. 3).

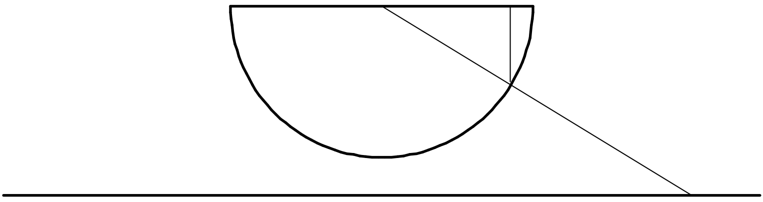


*Рис. 3.* Геометричне доведення рівнопотужності прямої, півкола й інтервалу.

[1] Георг Кантор (1845–1918) — видатний німецький математик. Творець теорії множин.

Теорія кардинальних чисел (потужностей множин) — доволі змістовна та цікава математична дисципліна, яку ми розглянули лише на рівні найпростіших означень.

## 5.4. Обмежена монотонна послідовність

**Означення 48.** *Послідовність дійсних чисел $\{x_n\}$:*

- *не зростає, якщо $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$;*
- *не спадає, якщо $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$;*
- *зростає, якщо $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$;*
- *спадає, якщо $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$.*

*У всіх чотирьох випадках послідовність називають монотонною, у двох останніх — строго монотонною.*

**Означення 49.** *Послідовність дійсних чисел:*

- *обмежена знизу, якщо існує дійсне число, яке не перевищує всі члени цієї послідовності;*
- *обмежена зверху, якщо існує дійсне число, яке не менше, ніж всі члени цієї послідовності;*
- *обмежена, якщо вона обмежена одночасно знизу і зверху.*

**Теорема 34.** *Нехай $\{x_n\}$ — монотонна обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді існує таке дійсне число $x$, при якому ціла частина і будь-яка стала кількість знаків безпосередньо після десяткової коми у записі $x_n$ та сама, що в $x$, для всіх $n$, починаючи з певного номера послідовності.*

**Доведення.** Розглянемо випадок неспадної послідовності додатних дійсних чисел (всі інші випадки розглядаються аналогічно[1]). Нехай подання $x_n$ десятковим дробом має такий вигляд:

$$x_n = \alpha_m^{(n)} \alpha_{m-1}^{(n)} ... \alpha_1^{(n)} \alpha_0^{(n)}, \beta_1^{(n)} \beta_2^{(n)} ... \beta_k^{(n)} \beta_{k+1}^{(n)} ... \ .$$

[1] Для послідовності додатних дійсних чисел, що не зростає, у поданому далі доведенні потрібно шукати не найбільше, а найменше невід'ємне ціле число $z_N$. Якщо ж члени послідовності, починаючи від якогось номера, від'ємні, то достатньо розглянути послідовність $\{-x_n\}$.

Для довільного натурального $k$ послідовність натуральних чисел

$$z_n = \overline{\alpha_m^{(n)}\alpha_{m-1}^{(n)}...\alpha_1^{(n)}\alpha_0^{(n)}\beta_1^{(n)}\beta_2^{(n)}...\beta_k^{(n)}}$$

не спадає й обмежена зверху числом $10^{k+m+1}$. Згідно із зауваженням 5, ця послідовність має найбільший член $z_N$. Отже, існує натуральне $N$, починаючи від якого (тобто для всіх натуральних $n > N$) маємо: $z_n = z_N$. Останнє еквівалентне твердженню теореми.

## 5.5. Теорема про вкладені відрізки

Нехай для довільного цілого числа $n$ визначена множина дійсних чисел $A_n$, а $K$, $L$ — деякі цілі числа, причому $K < L$. Запровадимо такі позначення:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=K}^{L} A_n &= \{x|\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad K \le n \le L\ \wedge\ x \in A_n\};\\
\bigcup_{n=K}^{L} A_n &= \{x|\ \exists\, n \in \mathbb{Z} \quad K \le n \le L\ \wedge\ x \in A_n\};\\
\bigcap_{n=K}^{+\infty} A_n &= \{x|\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad K \le n\ \wedge\ x \in A_n\};\\
\bigcup_{n=K}^{+\infty} A_n &= \{x|\ \exists\, n \in \mathbb{Z} \quad K \le n\ \wedge\ x \in A_n\};\\
\bigcap_{n=-\infty}^{L} A_n &= \{x|\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad n \le L\ \wedge\ x \in A_n\};\\
\bigcup_{n=-\infty}^{L} A_n &= \{x|\ \exists\, n \in \mathbb{Z} \quad n \le L\ \wedge\ x \in A_n\};\\
\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} A_n &= \{x|\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad x \in A_n\};\\
\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n &= \{x|\ \exists\, n \in \mathbb{Z} \quad x \in A_n\}.
\end{aligned}$$

Наприклад,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(0;\frac{1}{n}\right)=\varnothing,\qquad \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}(n;n+1)=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.$$

**Теорема 35 (Кантор).** *Нехай $\{[a_n;b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ — послідовність вкладених відрізків дійсної прямої: $a_1\le a_2\le a_3\le\dots\le b_3\le b_2\le b_1$, причому для довільного натурального m знайдеться такий відрізок $[z/10^m;(z+1)/10^m]$, $z\in\mathbb{Z}$, при якому, починаючи з достатньо великого номера члена послідовності, всі відрізки $[a_n;b_n]$ належать до цього відрізка. Маємо:*

$$\forall\ m\in\mathbb{N}\ \ \exists\ z\in\mathbb{Z}\ \ \exists\ K\in\mathbb{N}\ \ \forall\ k>K\quad \frac{z}{10^m}\le a_k\le b_k<\frac{z+1}{10^m}. \tag{37}$$

*Тоді існує єдина точка дійсної прямої, що належить до всіх відрізків $[a_n;b_n]$. Матимемо:*

$$\exists!\ x\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n;b_n].$$

**Доведення.** Послідовність $\{a_n\}$ монотонна й обмежена, як і $\{b_n\}$. Нехай $\bar a$, $\bar b$ — такі дійсні числа, десяткові знаки яких збігаються з десятковими знаками $a_n$, $b_n$ відповідно для достатньо великих $n$ (див. попередню теорему).

$$(\forall\ n\in\mathbb{N}\quad a_n\le b_n)\Rightarrow\bar a\le\bar b.$$

Справді, якщо $\bar a>\bar b$, то існує таке натуральне $n$, при якому $a_n>b_n$, що суперечить умові теореми.

$$\forall\ y\in\mathbb{R}\quad((\forall\ n\in\mathbb{N}\quad a_n\le y\le b_n)\Rightarrow\bar a\le y\le\bar b.$$

Справді, якщо $y<\bar a$ або $\bar b<y$, то існує натуральне таке $n$, при якому $y<a_n$ або $b_n<y$. Отже, всі елементи перетину $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n;b_n]$ лежать між $\bar a$ і $\bar b$. Припустимо, що $\bar a<\bar b$, тоді існують такі $z\in\mathbb{Z}$ і $m\in\mathbb{N}$, при яких:

$$\bar a\le\bar a_m^+=\frac{z}{10^m}<\frac{z+1}{10^m}\le\bar b_m^-\le\bar b,$$

тобто десяткові знаки $\bar{a}$ та $\bar{b}$ до $(m-1)$-го після коми збігаються, а в $m$-му відрізняються. Тоді відрізок $[z/10^m; (z+1)/10^m]$ сталої довжини $10^{-m}$ міститься у відрізку як завгодно малої довжини (див. (37)). Виявлена суперечність вказує на те, що припущення $\bar{a} < \bar{b}$ хибне. Вибравши $x = \bar{a} = \bar{b}$, отримаємо:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n; b_n] = \{x\}.$$

## 5.6. Дії з дійсними числами

**Означення 50.** *Сума дійсних $x$ та $y$ — дійсне $z$, що не менше від всіх[1] сум наближень $x$ та $y$ з недостачею і не перевищує всіх сум наближень $x$ та $y$ з надлишком: $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad x_n^- + y_n^- \leq z \leq x_n^+ + y_n^+$. Різницею $x - y$ називають суму чисел $x$ і $-y$.*

Існування та єдиність суми випливає зі справдження умов теореми Кантора для послідовності відрізків $[x_n^- + y_n^-; x_n^+ + y_n^+]$ (див. нерівності (36)).

**Означення 51.** *Добуток невід'ємних дійсних $x$ та $y$ — дійсне $z$, що не менше від всіх добутків наближень $x$ і $y$ з недостачею та не перевищує всіх добутків наближень $x$ та $y$ з надлишком:*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad x_n^- y_n^- \leq z \leq x_n^+ y_n^+.$$

Існування та єдиність добутку випливає зі справдження умов теореми Кантора для послідовності відрізків $[x_n^- y_n^-; x_n^+ y_n^+]$:

$$\begin{aligned} x_n^+ y_n^+ - x_n^- y_n^- &= (x_n^- + 10^{-n})(y_n^- + 10^{-n}) - x_n^- y_n^- = \\ &= 10^{-n}(x_n^- + y_n^-) + 10^{-2n} < 10^{-n}(x_0^+ + y_0^+ + 1), \end{aligned}$$

де права частина нерівності — як завгодно мале додатне число для достатньо великого $n$.

[1] У цьому й у наступних означеннях, враховуючи нерівності (36) та властивості відношення порядку для скінченних десяткових дробів, достатньо розглядати суми (добутки) наближень з однією кількістю знаків після коми.

**Означення 52.** *Добутком дійсних чисел $x$ та $y$ називають число $|x| \cdot |y|$, якщо числа $x$ і $y$ одного знака, та $-|x| \cdot |y|$, якщо різного знака:*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \qquad \text{sign}\ (x \cdot y) = \text{sign}\ x \ \cdot \ \text{sign}\ y.$$

**Теорема 36.** *Для кожного дійсного числа $x$, відмінного від $0$, існує таке обернене $x^{-1}$, при якому $xx^{-1} = 1$.*

**Доведення.** Легко пересвідчитися, що з існування $x^{-1}$ випливає існування $(-x)^{-1} = -x^{-1}$. Отже, достатньо обмежитися випадком додатного $x$, коли для достатньо великих $n$ справджується нерівність $x_n^- > 0$. Для послідовності вкладених відрізків $[(x_n^+)^{-1}; (x_n^-)^{-1}]$ з раціональними кінцями справджуються умови теореми Кантора:

$$(x_n^-)^{-1} - (x_n^+)^{-1} = \frac{x_n^+ - x_n^-}{x_n^- x_n^+} = \frac{10^{-n}}{x_n^- x_n^+} < \frac{1}{10^n (x_n^-)^2},$$

де останній вираз — як завгодно мале додатне число для всіх $n$, починаючи від деякого $n = N$. Отже, існує таке єдине дійсне число $y$, при якому для довільного натурального $n$ маємо:

$$(x_n^+)^{-1} \leq y \leq (x_n^-)^{-1} \Rightarrow \begin{cases} x_n^- y_n^- \leq x_n^- y \leq x_n^- (x_n^-)^{-1} = 1 \\ x_n^+ y_n^+ \geq x_n^+ y \geq x_n^+ (x_n^+)^{-1} = 1 \end{cases}.$$

З отриманих нерівностей $x_n^- y_n^- \leq 1 \leq x_n^+ y_n^+$, які справджуються для всіх (у тому числі і як завгодно великих) натуральних $n$, випливає, що $xy = 1$ (див. означення 51).

Для натурального $n$ множення дійсного $x$ на $10^n$ зводиться до зсуву десяткової коми у записі $x$ на $n$ знаків праворуч, а на $10^{-n}$ — на $n$ знаків ліворуч. Легко побачити, що

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad x_n^- = 10^{-n}[10^n x].$$

**Означення 53.** *Відношенням (часткою) двох дійсних чисел $x$ та $y \neq 0$ називають добуток $xy^{-1}$, який також позначають так:*

$$\frac{x}{y} = x/y.$$

**Зауваження 16.** *Для знаходження наближення результату виконання арифметичних дій над дійсними числами достатньо виконати такі дії над наближенням цих дійсних чисел. Множина раціональних чисел — поле, тому й множина дійсних чисел — поле з означеними операціями множення і ділення.*

## 5.7. Границя послідовності

**Означення 54.** *Нехай* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— послідовність дійсних чисел.*

1. *Дійсне число* $A$ *— границя послідовності, якщо для довільного додатного як завгодно малого* $\varepsilon$ *існує натуральне таке* $K$*, при якому для всіх* $n > K$ *різниця* $n$*-го члена послідовності і границі за абсолютною величиною менша від* $\varepsilon$*:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > K \quad |a_n - A| < \varepsilon,$$

   *тобто різниця між членом послідовності та границею — як завгодно мале за абсолютною величиною число для всіх номерів членів послідовності, що більші, ніж певне натуральне число. Таку послідовність називають збіжною. Позначатимемо це таким чином:*

$$A = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

2. *Послідовність прямує до* $+\infty$ $(-\infty)$*, якщо для довільного додатного як завгодно великого* $\varepsilon$ *існує таке натуральне* $K$*, при якому для всіх* $n > K$ $n$*-ий член послідовності більший, ніж* $\varepsilon$ *(менший, ніж* $-\varepsilon$*):*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in K \quad a_n > \varepsilon \quad (a_n < -\varepsilon).$$

   *Інакше кажучи, член послідовності як завгодно великий (малий) для достатньо великого номера члена послідовності. Позначатимемо це таким чином:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty\right).$$

3. *Послідовність прямує до нескінченності, якщо для довільного додатного як завгодно великого $\varepsilon$ існує таке натуральне $K$, при якому для всіх $n > K$ $n$-ий член послідовності за абсолютною величиною більший, ніж $\varepsilon$:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K \quad |a_n| > \varepsilon.$$

*Інакше кажучи, член послідовності як завгодно великий за абсолютною величиною для достатньо великого номера члена послідовності. Позначатимемо це так:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty.$$

*Такі послідовності називатимемо нескінченно великими.*

4. *Послідовність нескінченно мала*[1]*, якщо* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

**Зауваження 17.** *Послідовність, всі члени якої дорівнюють сталій $a$, збігається до $a$.*

**Теорема 37.** *Збіжна послідовність має єдину границю.*

**Доведення** (від супротивного). Нехай $A_1 \neq A_2$ — границі збіжної послідовності $\{a_n\}$. Існують номери членів послідовності, починаючи від яких члени послідовності відрізняються від $A_1$ та $A_2$ за абсолютною величиною не більше, ніж на $\varepsilon = |A_1 - A_2|/2$.

$$\begin{cases} \exists\ K_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K_1 \quad |a_n - A_1| < \varepsilon \\ \exists\ K_2 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K_2 \quad |a_n - A_2| < \varepsilon \end{cases}.$$

Для всіх $n > \max(K_1, K_2)$ маємо:

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_n + a_n - A_2| \leq |A_1 - a_n| + |a_n - A_2| < 2\varepsilon = |A_1 - A_2|.$$

Таким чином, додатне число $|A_1 - A_2|$ менше за себе, що неможливо.

**Теорема 38.** *Якщо послідовність $\{a_n\}$ — нескінченно велика, то послідовність $\{1/a_n\}$ — нескінченно мала:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

[1] Точніше було би казати нескінченно мала *за абсолютною величиною*. Однак у літературі поширене саме таке означення.

**Доведення.** З означення 54 маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in K \quad |a_n| > 1/\varepsilon;$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{n\to+\infty} 1/a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in K \quad |1/a_n| < \varepsilon.$$

Якщо член послідовності $\{a_n\}$ як завгодно великий для достатньо великого $n$, то й член послідовності $\{1/a_n\}$ як завгодно близький до нуля, починаючи від деякого достатньо великого $n$.

**Теорема 39.** *Будь-яка збіжна послідовність $\{a_n\}$ обмежена.*

**Доведення.** Існує $K$ — номер члена збіжної послідовності, починаючи від якого різниця члена послідовності та границі менша за абсолютною величиною, ніж 1:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \Rightarrow \exists\, K \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > K \quad |a_n - A| < 1.$$

Виберемо:

$$M_+ = \max(a_1, a_2, ..., a_K, |A|+1), \qquad M_- = \min(a_1, a_2, ..., a_K, -|A|-1).$$

Тоді всі члени послідовності лежать у проміжку між $M_-$ і $M_+$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad M_- \le a_n \le M_+.$$

## 5.8. Основні теореми про границі

**Теорема 40.** *Границя послідовності сум, різниць і добутків членів збіжних послідовностей з однаковими номерами дорівнює відповідно сумі, різниці та добутку границь цих послідовностей:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = AB \end{cases}.$$

**Доведення.** З означення 54 маємо:

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K_a \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > K_a \quad |a_n - A| < \varepsilon/2 \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K_b \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > K_b \quad |b_n - B| < \varepsilon/2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K = \max(K_a, K_b) \quad \forall\ n > K \qquad \begin{cases} |a_n - A| < \varepsilon/2 \\ |b_n - B| < \varepsilon/2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$|(A + B) - (a_n - b_n)| = |(A - a_n) + (B - b_n)| \leq |A - a_n| + |B - b_n| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = A + B$. Аналогічно доводиться існування границі: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = A - B$.

Збіжна послідовність обмежена: $\exists\ A_+ > 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < A_+$. Тому отримаємо:

$$|AB - a_n b_n| = |AB - a_n B + a_n B - a_n b_n| \leq |B||A - a_n| + |a_n||B - b_n|.$$

$$\begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K_a \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K_a \quad |A - a_n| < \varepsilon/2(|B| + 1) \\ \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K_b \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K_b \quad |B - b_n| < \varepsilon/2A_+ \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K = \max(K_a, K_b) \quad \forall\ n > K$$

$$|AB - a_n b_n| \leq |B||A - a_n| + |a_n||B - b_n| < \frac{\varepsilon|B|}{2(|B| + 1)} + \frac{\varepsilon|a_n|}{2|A_+|} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = AB.$$

**Теорема 41.** *Якщо границя послідовності $A$ — дійсне число, відмінне від нуля, то послідовність чисел, обернених до членів даної послідовності, збігається до $1/A$:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}.$$

**Доведення.** Для збіжної послідовності, що не є нескінченно малою, існує $K_1$ — номер члена послідовності $\{a_n\}$, починаючи від якого різниця між членом послідовності та границею менша, ніж половина абсолютної величини границі:

$$|a_n - A| < \frac{|A|}{2} \Leftrightarrow A - \frac{|A|}{2} < a_n < A + \frac{|A|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{2}{|A|}.$$

З умови $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ випливає існування для довільного додатного $\varepsilon$ номера члена послідовності $\{a_n\}$, починаючи від якого різниця члена послідовності та її границі $A$ за абсолютною величиною менша, ніж $\varepsilon|A|^2/2$:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K_2 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K_2 \quad |A - a_n| < \frac{\varepsilon|A|^2}{2}.$$

В результаті маємо: $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K = \max(K_1, K_2) \quad \forall\ n > K$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|A - a_n|}{|a_n||A|} < \frac{|A|^2\varepsilon}{2|a_n||A|} < \varepsilon.$$

**Наслідок 9.** *Раціональний вираз від членів збіжних послідовностей з однаковими номерами збігається до відповідного раціонального виразу від границь цих послідовностей, якщо останній має зміст (відсутнє ділення на нуль).*

**Теорема 42.** *Якщо члени однієї збіжної послідовності не перевищують відповідних членів іншої збіжної послідовності, то границя першої послідовності не перевищує границю другої:*

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N} \quad a_n \le b_n \\ a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \\ b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \end{cases} \Rightarrow\ a \le b. \tag{38}$$

*Інакше кажучи, в нестрогих нерівностях можна робити граничний перехід.*

**Доведення** (від супротивного). При справдженні умови (38) для довільного додатного $\varepsilon$ існує таке натуральне $N$, при якому для всіх натуральних $n > N$ справджуються нерівності:

$$\begin{cases} |a - a_n| < \varepsilon \\ |b - b_n| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \\ b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \end{cases}. \tag{39}$$

Якби справджувалася нерівність $a > b$, то, взявши $\varepsilon = (a - b)/2$, з нерівностей (39) можна отримати:

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

що суперечить умові (38).

**Зауваження 18.** *Зі строгих нерівностей між відповідними членами збіжних послідовностей не випливають строгі нерівності між границями цих послідовностей.*

Наприклад, для довільного натурального $n$ справджується строга нерівність: $-1/n < 1/2^n$, але

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}$$

(див. приклади обчислення границь).

**Теорема 43 (про три границі).** *Якщо члени однієї послідовності обмежені зверху та знизу відповідними членами двох інших послідовностей, що мають спільну границю, то й ця послідовність збігається до тієї самої границі:*

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N} \quad a_n \le b_n \le c_n, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = A \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = A.$$

**Доведення.** Для довільного додатного $\varepsilon$ існують номери членів послідовностей, що обмежують знизу та зверху дану послідовність, починаючи від яких члени цих послідовностей відрізняються від спільної границі не більше, ніж на $\varepsilon$, за абсолютною величиною:

$$\begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K_1 \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \\ \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K_2 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > K_2 \quad A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ K = \max(K_1, K_2) \quad \forall\ n > K \quad A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon.$$

Звідси й випливає твердження теореми. Випадок $A = \pm\infty$ потрібно розглядати аналогічно.

## 5.9. Приклади обчислення границь

**Теорема 44.** *Справджуються такі висловлювання щодо границь:*

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty \ \wedge\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0;$$

$$\forall\ a>1 \quad \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \ \wedge \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0;$$

$$\forall\ k\in\mathbb{N} \quad \forall\ a>1 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

**Доведення.** Для довільного натурального $k$ і довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне $N > \varepsilon$, при якому для всіх $n > N$ справджуються нерівності: $n^k \geq n > N > \varepsilon$.

Для довільного $a > 1$ маємо:

$$a^n = (1+(a-1))^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j\ (a-1)^j > 1 + n(a-1).$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon$ знайдеться таке натуральне

$$N > (\varepsilon - 1)/(a-1),$$

при якому для всіх $n > N$ справджуються нерівності:

$$a^n > 1 + n(a-1) > \varepsilon.$$

Для довільних $a > 1$ та натурального $k$ маємо:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} : \frac{n^k}{a^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Отже, існують такі дійсне $\gamma<1$ і натуральне $N$, при яких:

$$\forall\ n > N \quad \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} : \frac{n^k}{a^n} < \gamma$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\ n > N \quad \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} < \gamma\frac{n^k}{a^n} < \gamma^2\frac{(n-1)^k}{a^{n-1}} < \cdots < \gamma^{n-N}\frac{(N+1)^k}{a^{N+1}},$$

де крайній правий член збігається до 0 (див. вже доведені теорему 38 про зв'язок між нескінченно великими й нескінченно малими послідовностями та друге твердження даної теореми).

## 5.10. Збіжність монотонної послідовності

**Теорема 45 (Вейєрштрасс).**[1] *Обмежена монотонна послідовність дійсних чисел збіжна.*

**Доведення.** Нехай $\{x_k\}$ — монотонна обмежена послідовність дійсних чисел, а дійсне число $x$ є таким, при якому ціла частина і будь-яка стала кількість $n$ знаків безпосередньо після десяткової коми у записі $x_k$ ті самі, що в $x$ (а це означає, що в $(x_k)_n^-$ чи в $(x_k)_n^+$), для всіх $k$, починаючи від деякого $k = K$. Таке $x$ існує, згідно з теоремою 34. Враховуючи нерівності (36), маємо:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, K \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > K \quad |x_k - x| \le 10^{-n}.$$

Твердження теореми випливає з того, що для довільного додатного $\varepsilon$ існує таке натуральне $n$, при якому $10^{-n} < \varepsilon$. За $n$ потрібно взяти збільшений на 1 номер першої відмінної від 0 цифри після коми у десятковому записі $\varepsilon$.

## 5.11. Число $\pi$

Розглянемо послідовності:

$\{a_n\}$ — периметрів правильних $2^n$-кутників, вписаних у коло і таких, в яких вершини $2^n$-кутника є одночасно вершинами $2^{n+1}$-кутника (інакше кажучи, кожна вершина $2^{n+1}$-кутника є вершиною $2^n$-кутника або ділить дугу між послідовними вершинами $2^n$-кутника навпіл);

$\{b_n\}$ — периметрів правильних $2^n$-кутників, описаних навколо того самого кола, і таких, в яких сторони $2^n$-кутника є продовженням половини сторін $2^{n+1}$-кутника (див. рис. 4).

Відношення $a_n$ до діаметра кола залежить лише від $n$ (з міркувань про подібність геометричних фігур). Для довільного натурального $n > 1$ справджуються такі нерівності: $a_n < b_n$, $a_n < a_{n+1}$ і $b_{n+1} < b_n$, тобто $a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < b_4 < b_3 < b_2$.

[1] Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс (1815–1897) — німецький математик. Зробив великий внесок у логічне обґрунтування математичного аналізу, розробив основи теорії фукцій комплексної змінної.

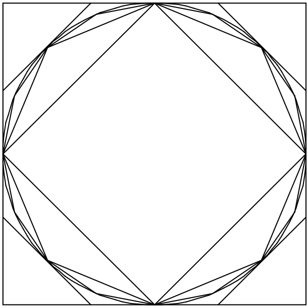


*Рис. 4.* Правильні 4-, 8- і 16-кутники, вписані у коло, і правильні 4- та 8-кутники, описані навколо кола так, що середини їхніх сторін є вершинами вписаних відповідно 4- і 8-кутника.

Послідовність $\{a_n\}$ зростає й обмежена зверху, тому існує її границя[1], яку називають *довжиною кола.* Відношення цієї границі до діаметра кола — стала, яку позначають грецькою літерою $\pi$ (потрібно читати "пі"). Для обчислення числа $\pi = 3,141596...$ з будь-якою точністю застосовують методи диференціального числення (див. далі подання числа $\pi$ сумою ряду).

Повному центральному куту $360^\circ$ кола з радіусом $r$ відповідає дуга (коло) довжиною $2\pi r$. Для того, щоб означити довжину дуги $k^\circ$, впишемо у коло правильний $2^n$-кутник так, щоб один з кінців дуги був його вершиною. Знайдемо $c_n$ — довжину ламаної, утвореної тими сторонами $2^n$-кутника, кінці яких належать до даної дуги. Означимо довжину дуги як $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Послідовність $c_n$ обмежена зверху довжиною кола і зростає, тому границя існує. При цьому $c_n$ відрізняється від $a_n k^\circ/360^\circ$ не більше, ніж на довжину сторони правильного $2^n$-кутника, що прямує до 0, якщо $n \to +\infty$. Отже, дуга $k^\circ$ має таку довжину:

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n k^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi r k}{360} = \frac{\pi r k}{180}.$$

[1] Вивчивши поняття диференційовності функції дійсної змінної, легко довести, що й послідовність $\{b_n\}$ збігається до тієї самої границі. Більше того, до цієї ж границі збігаються периметри вписаних чи описаних многокутників з довільною кількістю сторін і необов'язково правильних за умови, що довжина найбільшої сторони прямує до 0.

*Радіанною мірою кута називають відношення довжини відповідної дуги центрального кута до радіуса кола.* Одиницею радіанної міри кута є *радіан* — центральний кут, довжина дуги якого дорівнює радіусу кола, а градусна міра — $180°/\pi$.

## 5.12. Точна межа

**Означення 55.** *Нехай $X$ — непорожня множина дійсних чисел.*

1. *Найменше з дійсних чисел, що не менші, ніж всі елементи множини дійсних чисел $X$, називають точною верхньою межею $X$ і позначають через $\sup X$ або $\sup\limits_{x\in X} x$. Отже:*

$$a = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in X \quad x \le a \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X \quad a - \varepsilon < x \end{cases}.$$

   *Якщо $X$ необмежена зверху, то вважають, що $\sup X = +\infty$.*

2. *Найбільше з дійсних чисел, що не перевищують усі елементи множини дійсних чисел $X$, називають точною нижньою межею $X$ і позначають через $\inf X$ або $\inf\limits_{x\in X} x$. Отже:*

$$a = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in X \quad x \ge a \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X \quad a + \varepsilon > x \end{cases}.$$

   *Якщо $X$ необмежена знизу, то вважають, що $\inf X = -\infty$.*

**Теорема 46.** *Для обмеженої зверху (знизу) множини $X$ дійсних чисел існує скінченна точна верхня (нижня) межа.*

**Доведення.** Обмежимося доведенням існування точної верхньої межі, бо доведення існування точної нижньої межі аналогічне. Для довільного натурального $n$ позначимо через $a_n$ найменший з усіх скінченних десяткових дробів з $n$ знаками після коми, кожен з яких не менший, ніж всі елементи з $X$. Покажемо, що такий дріб існує і він єдиний. Кожен скінченний десятковий дріб з $n$ знаками після коми має такий вигляд: $z/10^n$, де $z \in \mathbb{Z}$. У поданні

$$(-\infty; +\infty) = \bigcup_{z=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{z}{10^n}; \frac{z+1}{10^n} \right]$$

проміжки не мають спільних точок. Розглянемо з них лише ті, які містять елементи множини $X$, і з них виберемо той, правий кінець якого найбільший. Ним і буде означений дріб $a_n$. Зауважимо, що завжди існує таке $x \in X$, при якому $a_n - 10^{-n} < x \le a_n$. Обмежена знизу послідовність $\{a_n\}$ не зростає, тому існує:

$$a = \lim_{n \to +\infty} a_n.$$

Врахувавши зміст елементів послідовності $\{a_n\}$ і здійснивши граничний перехід $n \to +\infty$, маємо:

$$(\forall\, x \in X \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x \le a_n) \;\Rightarrow\; (\forall\, x \in X \quad x \le a).$$

Припустимо, що $a$ не є точною верхньою межею, тобто

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in X \quad a - \varepsilon > x. \tag{40}$$

Якщо $10^{-n} < \varepsilon$, то існує $b$ — скінченний десятковий дріб з $n$ знаками після коми, для якого і для довільного $x \in X$ справджуються такі нерівності:

$$a_n \ge a > a - 10^{-n} > b > a - \varepsilon > x,$$

що суперечить вибору послідовності $\{a_n\}$. Виявлена суперечність свідчить про хибність припущення (40).

## 5.13. Збіжна підпослідовність

**Означення 56.** *Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ є деякою послідовністю дійсних чисел, а послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ зростає. Тоді послідовність $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ називають підпослідовністю послідовності $\{a_n\}$.*

**Теорема 47 (Больцано — Вейєрштрасс).**[1] *Для довільної обмеженої послідовності дійсних чисел існує її збіжна підпослідовність.*

**Доведення.** Нехай $\{a_n\}$ — довільна обмежена послідовність. Існує об'єднання скінченної кількості відрізків:

$$\left[\frac{z}{10}; \frac{z+1}{10}\right], \qquad z \in \mathbb{Z},$$

[1] Бернард Больцано (1781–1848) — чеський математик.

що містить всі елементи послідовності $\{a_n\}$. Отже, хоча б один з цих відрізків містить нескінченну кількість елементів послідовності. Виберемо $b_1$ — скінченний десятковий дріб з одним знаком після коми і такий, що відрізок $I_1 = [b_1; b_1 + 10^{-1}]$ містить нескінченну кількість членів послідовності $\{a_n\}$. Побудуємо послідовність $\{b_k\}$ рекурентно, тобто визначаючи наступний член послідовності через попередні. Нехай задано послідовність вкладених відрізків:

$$I_k = [b_k; b_k + 10^{-k}], \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ K,$$

і кожен з них містить нескінченну кількість членів послідовності $\{a_n\}$. Виберемо $b_{K+1}$ — скінченний десятковий дріб з $(K+1)$-им знаком після коми і такий, що відрізок

$$I_{K+1} = \left[b_{K+1}; b_{K+1} + 10^{-(K+1)}\right] \subset I_K$$

містить нескінченну кількість членів послідовності $\{a_n\}$. Відрізок $I_K$ має таку властивість, то її має і один з відрізків:

$$\left[b_K + \frac{j}{10} \cdot 10^{-K}; b_K + \frac{j+1}{10} \cdot 10^{-K}\right], \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 9,$$

на які той розбивається скінченними десятковими дробами з $(K+1)$-им знаком після коми. Отже, такий відрізок $I_{K+1}$ можна знайти. Згідно з теоремою Кантора про вкладені відрізки, існує

$$b = \lim_{k \to +\infty} b_k.$$

Побудуємо збіжну до $b$ підпослідовність послідовності $\{a_n\}$. Виберемо:

$n_1$ таким, щоб $a_{n_1} \in I_1$;

$n_2$ таким, щоб $a_{n_2} \in I_2 \ \wedge\ n_2 > n_1$; ...

$n_{k+1}$ таким, щоб $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1} \ \wedge\ n_{k+1} > n_k$; ... .

Для всіх натуральних $k$ справджується нерівність: $|b - a_{n_k}| \le 10^{-k}$, тому $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = b$, що й потрібно було довести.

## 5.14. Арифметична прогресія

**Означення 57.** *Послідовність $\{a_n\}$ — арифметична прогресія, якщо кожен її член відрізняється від попереднього на сталу $d$ — різницю арифметичної прогресії:*

$$a_{n+1} = a_n + d \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = d.$$

Із системи

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{cases}$$

випливає така *характеристична властивість: сума наступного та попереднього членів прогресії дорівнює подвоєному середньому члену.* Маємо: $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$.

**Теорема 48.** *$n$-ий член арифметичної прогресії дорівнює:*

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

**Доведення** проведемо методом математичної індукції.

Твердження теореми справджується для $n = 1$, бо

$$a_1 = a_1 + (1-1)d.$$

Нехай $a_n = a_1 + (n-1)d$, тоді:

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + ((n+1)-1)d.$$

Таким чином, твердження теореми справджується і для $(n+1)$.

**Теорема 49.** *Сума перших $n$ членів арифметичної прогресії дорівнює:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

**Доведення** проведемо методом математичної індукції.

Твердження теореми справджується для $n = 1$, бо

$$S_1 = a_1 = a_1 + \frac{1}{2}(1-1)d.$$

Якщо $S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$, то маємо:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d + a_1 + nd = \\ &= (n+1)a_1 + \frac{n(n-1+2)}{2}d = \\ &= (n+1)a_1 + \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}d. \end{aligned}$$

Таким чином, твердження теореми справджується і для $n+1$.

## 5.15. Геометрична прогресія

**Означення 58.** *Послідовність $\{a_n\}$ — геометрична прогресія, якщо кожен її наступний член дорівнює добутку попереднього на одне й те саме дійсне число — знаменник геометричної прогресії, відмінний від* 0 *та* 1*:* $a_{n+1} = qa_n$, $q \neq 0$, $q \neq 1$.

Із системи

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n q \\ a_{n-1} = a_n / q \end{cases}$$

випливає *характеристична властивість геометричної прогресії: квадрат середнього члена геометричної прогресії дорівнює добутку попереднього та наступного членів прогресії.* Маємо: $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

**Теорема 50.** *Формула $n$-го члена геометричної прогресії:*

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

**Доведення** проведемо методом математичної індукції.

Твердження теореми справджується для $n=1$, бо $a_1 = a_1 q^{1-1}$.

Нехай $a_n = a_1 q^{n-1}$, тоді маємо: $a_{n+1} = a_n q = a_1 q^{(n+1)-1}$.

**Теорема 51.** *Для геометричної прогресії маємо:*

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

**Доведення** проведемо методом математичної індукції.

Твердження теореми справджується для $n = 1$, бо

$$S_1 = a_1 = a_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)} \\ &\Downarrow \\ S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n = \\ &= a_1 \frac{q^n - 1 + q^n(q - 1)}{q - 1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

**Означення 59.** *Якщо $q$ — знаменник геометричної прогресії $\{a_n\}$ — за абсолютною величиною менший, ніж $1$, то означимо суму всіх членів геметричної прогресії як границю часткових сум:*

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

## 5.16. Числовий ряд

**Означення 60.** *Числовий ряд — вираз (запис) такого вигляду:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots, \tag{41}$$

*де $\{a_n\}$ — послідовність чисел. Суму перших $N$ елементів, що дорівнює:*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N,$$

*називають частковою сумою ряду (41). Границю часткових сум ряду, якщо вона існує, називають сумою числового ряду:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

*Ряд (41) — збіжний, якщо ця границя — дійсне число.*
*Ряд (41) — абсолютно збіжний, якщо збіжним є такий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots.$$

Необхідною умовою збіжності ряду (41) є така умова:

$$\lim_{N\to+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \right) = 0.$$

Сума членів геометричної прогресії, знаменник якої за абсолютною величиною менший, ніж 1, — збіжний і абсолютно збіжний ряд.

Для десяткового дробу $\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 ... \in [0;1]$ маємо:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n},$$

бо для послідовності часткових сум цього ряду справджуються такі нерівності:

$$0 \le \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_n}{10^n} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{10^n} \le \alpha < \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{10^n} + \frac{1}{10^N},$$

де останній доданок прямує до нуля, якщо $N\to+\infty$.

**Теорема 52.** *Нехай послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ невід'ємних дійсних чисел є такими, при яких для всіх натуральних n $0 \le a_n \le b_n$. Тоді маємо:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

**Доведення.** Твердження теореми — наслідок нерівності:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \le \sum_{n=1}^{N} b_n,$$

а також монотонності часткових сум.

**Теорема 53.** *Нехай* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *— послідовності додатних дійсних чисел.*

1. *Якщо* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = k \in (0;+\infty)$, *то ряди* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *одночасно збігаються або ні.*

2. *Якщо* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = +\infty$, *то з рівності* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ *випливає рівність* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

3. *Якщо* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$, *то з нерівності* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ *випливає нерівність* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

**Доведення**

1. Якщо $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = k \in (0;+\infty)$, то для достатньо великих $n$ справджується нерівність:

$$\frac{k}{2} = k - \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < k + \frac{k}{2} = \frac{3k}{2}.$$

2. Якщо $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = +\infty$, то для довільного як завгодно великого додатного $\varepsilon$ для достатньо великих $n$ справджується нерівність: $a_n > \varepsilon b_n$.

3. Якщо $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$, то для довільного як завгодно малого додатного $\varepsilon$ для достатньо великих $n$ справджується нерівність: $a_n < \varepsilon b_n$.

Для завершення доведення достатньо використати попередню теорему.

## 5.17. Періодичні дроби

**Теорема 54.** *Множина раціональних чисел є множиною періодичних десяткових дробів.*

**Доведення.** Доведемо спочатку, що будь-який періодичний дріб — раціональне число. Достатньо обмежитися розглядом додатних чисел:

$$\alpha_l...\alpha_1\alpha_0,\beta_1\beta_2...\beta_m(\gamma_1\gamma_2...\gamma_n),$$

які можна подати у такому вигляді:

$$10^{-m}\left(\overline{\alpha_l...\alpha_1\alpha_0\beta_1\beta_2...\beta_m}+0,(\gamma_1\gamma_2...\gamma_n)\right),$$

де

$$\begin{aligned}0,(\gamma_1\gamma_2...\gamma_n) &= 0,\gamma_1\gamma_2...\gamma_n\gamma_1\gamma_2...\gamma_n\gamma_1\gamma_2...\gamma_n... =\\ &= 0,\gamma_1\gamma_2...\gamma_n+0,\overbrace{000...0}^{n\text{ нулів}}\gamma_1\gamma_2...\gamma_n+0,\overbrace{000...0}^{2n\text{ нулів}}\gamma_1\gamma_2...\gamma_n+\dots=\\ &= 0,\gamma_1\gamma_2...\gamma_n+10^{-n}\cdot 0,\gamma_1\gamma_2...\gamma_n+10^{-2n}\cdot 0,\gamma_1\gamma_2...\gamma_n+\dots=\\ &= \overline{\gamma_1\gamma_2...\gamma_n}\cdot 10^{-n}\cdot\left(1+10^{-n}+10^{-2n}+10^{-3n}+\dots\right)=\\ &= \overline{\gamma_1\gamma_2...\gamma_n}\cdot 10^{-n}:(1-10^{-n})=\overline{\gamma_1\gamma_2...\gamma_n}:(10^n-1)\in\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Те, що будь-яке раціональне число можна подати нескінченним періодичним дробом, вже доведено (див. зауваження 13). Залишається лише вказати, яким чином *довжина періоду* (кількість цифр періоду) такого дробу пов'язана зі значеннями чисельника та знаменника дробу $p/q$, де $p\in\mathbb{Z}$ і $q\in\mathbb{N}$. Обмежимося розглядом випадку, коли:

- $p$ — натуральне число, яке менше, ніж $q$;
- $q$ — взаємно просте з 10. В іншому разі чисельник і знаменник дробу $p/q$ потрібно домножити на степінь 2 чи 5 і подати дріб у вигляді $10^{-n}r/s$, де $r,s\in\mathbb{N}$, НСД$(s,10)=1$.

Нагадаємо, що множення на $10^{-n}$ десяткового дробу зводиться до перенесення десяткової коми праворуч на $n$ знаків.

Згідно з теоремою Ейлера, із взаємної простоти $q$ та 10 випливає існування такого натурального $m$, при якому: $10^{\varphi(q)}-1=mq$, де $\varphi(q)$ — значення функції Ейлера. Нехай

$$0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_{\varphi(q)}=\frac{mp}{10^{\varphi(q)}}<\frac{mq}{10^{\varphi(q)}}<1.$$

Тоді маємо:

$$\frac{p}{q} = \frac{mp}{mq} = \frac{mp}{10^{\varphi(q)} - 1} = \frac{mp}{10^{\varphi(q)}} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-\varphi(q)}} = \frac{mp}{10^{\varphi(q)}} \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n\varphi(q)} =$$
$$= 0,(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{\varphi(q)}).$$

Зауважимо, що скінченна послідовність $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... , $\alpha_{\varphi(q)}$ сама може бути утворена повторенням певної послідовності цифр. У даному разі потрібно бути обережним у виділенні періоду. Наприклад, ми записуємо $1/3 = 0,33333... = 0,(3)$, а не 0,(**33**), хоча $\varphi(3) = 2$.

Отже, довжина періоду десяткового дробу, яким подається нескоротний дріб $p/q$, — дільник $\varphi(s)$, де канонічне розкладення на прості множники натурального $s$ не містить степенів 2 та 5, а в усьому іншому збігається з канонічним розкладенням $q$.

## 5.18. Число Ейлера

**Теорема 55.** *Існує дійсне* $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

**Доведення.** Розглянемо послідовність дійсних чисел:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Згідно з біномною формулою, маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{1}{n^j} =$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{n^j}\,\frac{1}{j!} =$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\frac{1}{j!}. \qquad (42)$$

При збільшенні $n$ на 1 в отриманому виразі (42) з'явиться новий доданок:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

а кожний з уже написаних доданків, крім двох перших, що дорівнюють 1, збільшиться, бо множники вигляду $(1-\frac{j}{n})$ заміняться на більші множники вигляду $(1-\frac{j}{n+1})$. Отже, послідовність $\{a_n\}$ зростає.

Доведемо її обмеженість. Вилучивши із запису виразу (42) всі множники вигляду $(1-\frac{j}{n})$, ми тільки збільшимо його величину:

$$a_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{43}$$

Замінивши у знаменниках дробів множники, що більші, ніж 2, на 2, ми лише збільшимо праву частину отриманої нерівності. Тому матимемо:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

бо сума *всіх* членів геометричної прогресії, що починається з 1 і має знаменник $1/2$, дорівнює 2.

Отже, послідовність $\{a_n\}$ обмежена зверху і зростає, тому вона збіжна.

## 5.19. Подання числа Ейлера сумою ряду

**Теорема 56.** *Справджується рівність:*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \ .$$

**Доведення.** Використаємо елементи доведення попередньої теореми. Зафіксуємо натуральне $k$ і розглянемо $n > k$. З монотонності послідовності $\{a_n\}$ та подання (42) випливає, що

$$e > a_n > 1 + \sum_{j=1}^{k} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\frac{1}{j!}.$$

Після граничного переходу $n \to +\infty$ маємо:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad e \geq 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \ \Rightarrow\ e \geq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\ .$$

Водночас після граничного переходу $n \to +\infty$ у нерівності (43) маємо:

$$e \le \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}.$$

Оцінимо точність наближення числа $e$ рядом. Якщо $n > k$, то

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j!} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \cdots + \frac{1}{(k+2)(k+3)\cdots n}\right) <$$

$$< \frac{1}{(k+1)!}\left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \frac{1}{(k+2)^3} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!\left(1 - \frac{1}{k+2}\right)} = \frac{k+2}{(k+1)(k+1)!}.$$

Таким чином:

$$0 < e - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < \frac{k+2}{(k+1)(k+1)!}.$$

Подання числа $e$ сумою ряду дає змогу знайти це число, використовуючи такий метод послідовних наближень, для якого:

- відхилення від точного значення достатньо швидко збігається до нуля, і відома його оцінка зверху;
- при знаходженні кожного наступного наближення використовують результати всіх попередніх розрахунків.

Розрахунки вказують на те, що $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \ldots$ .

## 5.20. Корінь натурального степеня

**Означення 61.** *Дійсне $y$ — корінь натурального степеня $n$ дійсного $x$, якщо $y^n = x$. Невід'ємний дійсний корінь парного степеня невід'ємного дійсного $x$ або дійсний корінь дійсного $x$ непарного степеня позначають*[1] *через $\sqrt[n]{x}$ і називають арифметичним коренем.*

[1] Математичний символ $\sqrt{\ }$ називають радикалом.

Останнє твердження потребує пояснень. Поле дійсних чисел можна розширити до поля комплексних чисел, в якому кожне дійсне число, відмінне від нуля, має $n$ різних комплексних коренів степеня $n$. Для парного $n = 2k$ це виявляється так: $y^{2k} = x \;\Leftrightarrow\; (-y)^{2k} = x$. Через арифметичний корінь всі інші комплексні корені визначаються доволі просто (див. розділ "Комплексні числа").

**Теорема 57.** *Для довільних натурального $n$ та дійсного додатного $x$ існує єдиний додатний корінь степеня $n$:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in (0; +\infty) \quad \exists!\; y \in (0; +\infty) \quad x = y^n.$$

**Доведення.** Нехай $y_k^-$ — найбільший з невід'ємних скінченних десяткових дробів з $k$ знаками після коми, $n$-ий степінь якого не перевищує $x$, $y_k^+$ — найменший зі скінченних десяткових дробів з $k$ знаками після коми, $n$-ий степінь якого більший, ніж $x$. Такі $y_k^-$ та $y_k^+$ знайдуться для довільного натурального $k$, бо

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{10^k}\right)^n = +\infty.$$

Послідовність $\{y_k^-\}$ не спадає, а $\{y_n^+\}$ не зростає, причому

$$y_k^+ = y_k^- + 10^{-k},$$

тому маємо:

$$(y_k^-)^n \le x < (y_k^+)^n. \tag{44}$$

Згідно з теоремою Кантора, існує:

$$\sqrt[n]{x} = y = \lim_{k\to+\infty} y_k^- = \lim_{k\to+\infty} y_k^+.$$

Після граничного переходу $k \to +\infty$ у нерівностях (44) маємо:

$$y^n \le x \le y^n \;\Leftrightarrow\; y^n = x.$$

Єдиність арифметичного кореня випливає з таких нерівностей:

$$0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < a^n < a^{n-1}b < \cdots < ab^{n-1} < b^n. \tag{45}$$

**Лема 6.** *Існує границя:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{46}$$

**Доведення**

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Таким чином, послідовність $\{\sqrt[n]{n}\}$ спадає, починаючи від 3-го члена. З твердження (45) випливає, що $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Отже, існує:

$$c = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \geq 1.$$

Якщо $c > 1$, то для достатньо великих $n$ маємо:

$$\begin{aligned} |\sqrt[n]{n} - c| < \frac{c-1}{2} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt[n]{n} > c - \frac{c-1}{2} = \frac{c+1}{2} = 1 + \frac{c-1}{2} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad n = 1 + n\frac{c-1}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{c-1}{2}\right)^2 + \cdots \\ &\Rightarrow \quad n > \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 1 > \frac{n-1}{2}\left(\frac{c-1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

де права частина нерівності прямує до $+\infty$ для $n \to +\infty$. Виявлена суперечність вказує на те, що $c = 1$.

**Наслідок 10.** *Для довільного додатного a маємо:* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

**Доведення.** Для $a = 1$ твердження очевидне. Якщо $a > 1$, то для достатньо великих $n$ маємо:

$$1 < a < n \;\Leftrightarrow\; 1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n},$$

де останній вираз прямує до 1 для $n \to +\infty$. Якщо $0 < a < 1$, то маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}} = 1.$$

## 5.21. Дійсний степінь додатного числа

**Означення 62.** *Для взаємно простих цілого $p$ та натурального $q$ і додатного дійсного $x$ означимо: $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$. Вживатимемо це саме позначення у випадках від'ємного $x$ та непарного $q$ або довільного дійсного $x \neq 0$ і парного $p$.*

З означення кореня натурального степеня, комутативності дії множення та властивостей відношення порядку на множині дійсних чисел випливають такі властивості операції піднесення дійсного числа до раціонального степеня:

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}; \tag{47}$$

$$(x^r)^s = x^{rs}; \tag{48}$$

$$(r > 0 \ \wedge \ 0 < x < y) \Rightarrow 0 < x^r < y^r; \tag{49}$$

$$(s > r > 0 \ \wedge \ x < 1 < y) \Rightarrow (x^s < x^r \ \wedge \ y^r < y^s). \tag{50}$$

**Означення 63.** *Нехай $a > 0$, $r$ — дійсні, послідовність раціональних $r_n$ монотонно збігається до $r$. Означимо:*

$$a^r = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n}.$$

*Для $r > 0$ вважатимемо, що $0^r = 0$.*

Доведемо коректність такого означення, тобто незалежність $a^r$ від вибору послідовності $\{r_n\}$. Нехай $a > 1$, $r$ — дійсні числа, а послідовності раціональних чисел $r_n$, $q_n$ монотонно збігаються до $r$. Існує границя відношення відповідних членів обмежених монотонних і збіжних послідовностей $\{a^{r_n}\}$ та $\{a^{q_n}\}$:

$$b = \lim_{n \to +\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{q_n}} = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n - q_n}.$$

Припустимо, що $b > 1$. Тоді для достатньо великих $n$ маємо:

$$1 + \frac{b-1}{2} = \frac{b+1}{2} = b - \frac{b-1}{2} < a^{r_n - q_n} < b + \frac{b-1}{2} = \frac{3b-1}{2}.$$

Зі збіжності $(r_n - q_n) \to 0$ маємо: для довільного натурального $m$ існує таке натуральне $N$, при якому для всіх $n > N$:

$$r_n - q_n < \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad a^{1/m} > a^{r_n - q_n} > \frac{b+1}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a > \left(1 + \frac{b-1}{2}\right)^m > 1 + m\frac{b-1}{2},$$

де останній вираз прямує до $+\infty$, якщо $m \to +\infty$. Однак число $a$ — стале. Виявлена суперечність вказує на хибність припущення, що $b > 1$. Щоб довести хибність нерівності $b < 1$, достатньо розглянути таку послідовність: $a^{q_n - r_n} \to 1/b$.

Аналогічно доводять незалежність $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ від вибору $\{r_n\}$, якщо $0 < a < 1$. Величина дійсного степеня додатного дійсного числа — границя значень раціональних степенів, для яких справджуються співвідношення (47–50). Через це дані співвідношення справджуються і для дійсних степенів (див. основні теореми про границі).

## 5.22. Логарифм

**Означення 64.** *Число $c$ — логарифм $b$ за додатною основою $a \neq 1$, якщо $b = a^c$:*

$$c = \log_a b \;\Leftrightarrow\; b = a^c.$$

**Теорема 58.** *Для довільних додатних $a \neq 1$ і $b$ існує єдиний дійсний логарифм числа $b$ за основою $a$:*

$$\forall\ a, b \in (0; +\infty), \quad a \neq 1 \quad \exists!\ c \in (-\infty; +\infty) \quad b = a^c.$$

**Доведення.** Розглянемо випадок $a > 1$. Нехай $c_k^-$ — найбільший зі скінченних десяткових дробів з $k$ знаками після коми і таких, в яких відповідний степінь $a$ не перевищує $b$, $c_k^+$ — найменший зі скінченних десяткових дробів з $k$ знаками після коми і таких, в яких відповідний степінь $a$ більший, ніж $b$:

$$a^{c_k^-} \leq b < a^{c_k^+}. \tag{51}$$

Маємо: $\lim\limits_{m\to+\infty}(a^{1/10^k})^m = +\infty$, $\lim\limits_{m\to+\infty}(a^{-1/10^k})^m = 0$, тому такі $c_k^-$ та $c_k^+$ можна знайти для довільного натурального $k$. $\{c_k^-\}$ не спадає, а $\{c_n^+\}$ не зростає, причому $c_k^+ = c_k^- + 10^{-k}$ за визначенням. Таким чином, позначимо:

$$\log_a b = c = \lim_{k\to+\infty} c_k^- = \lim_{k\to+\infty} c_k^+.$$

Після граничного переходу $k\to+\infty$ у нерівностях (51) маємо:

$$a^c \le b \le a^c \;\Leftrightarrow\; a^c = b.$$

Єдиність логарифма випливає з властивості (50) операції піднесення до степеня. Аналогічно можна розглянути випадок $0 < a < 1$ або зауважити, що

$$\log_a b = -\log_{1/a} b.$$

Надалі, записуючи $\log_a b$, вважатимемо, що $a$, $b > 0$, $a \neq 1$. З означення логарифма та властивостей (47–50) випливають такі тотожності для додатних $a$, $b$, $c$ і натурального $m$:

$$\begin{array}{rcl} a^{\log_a b} & = & b, \qquad\qquad (52)\\ \log_a bc & = & \log_a b + \log_a c \\ & \Downarrow & \\ \log_a b^m & = & m \log_a b, \qquad\qquad (53)\\ \log_a c = \log_a b\ \log_b c & \Rightarrow & \log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_b a}, \\ \log_a 1/b & = & \log_{1/a} b = -\log_a b. \end{array}$$

Тотожність (52) називають основною логарифмічною тотожністю, бо з її допомогою перевіряють всі наступні. Рівність (53) справджується і для раціональних $m$. Розгляньте рівність $b^m = c^n$, щоб переконатися у цьому. Перелічені рівності можна узагальнити. Наприклад, для довільних дійсних чисел $b$ та $c$, відмінних від 0, і довільного натурального $n$ справджуються такі рівності:

$$\log_a |bc| = \log_a |b| + \log_a |c|, \qquad \log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|.$$

**Означення 65.** *Логарифм за основою $e$ називають натуральним логарифмом і позначають так:*

$$\ln a = \log_e a,$$

*а логарифм за основою 10 — десятковим логарифмом:*

$$\lg a = \log_{10} a.$$

## 5.23. Границі деяких послідовностей

**Теорема 59.** *Існують такі границі й суми рядів:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1; \tag{54}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[k]{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{k}; \tag{55}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{1/n}-1\right) = 1; \tag{56}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1; \tag{57}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty, \quad \alpha\in(0;1]; \tag{58}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\beta}} < +\infty, \quad \beta\geq 2; \tag{59}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = c, \qquad c\in(0;1). \tag{60}$$

**Доведення.** Рівність (54) доведено (див. лему 6). Вираз під знаком границі в лівій частині рівності (55) дорівнює:

$$\frac{n\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/k}\right)^{k}-1^{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(k-1)/k}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(k-2)/k}+\cdots+1}.$$

Чисельник цього виразу дорівнює 1, а кожний з $k$ доданків знаменника прямує до 1, якщо $n\to+\infty$. Таким чином, весь вираз прямує до $1/k$. Отже, рівність (55) доведено.

Для довільного натурального $n>1$ маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} < e^{1/n} < 1+\frac{1}{n-1} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{n} < e^{1/n}-1 < \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow 1 < n\left(e^{1/n}-1\right) < \frac{n}{n-1} = \frac{1}{1-1/n}.$$

Якщо $n \to +\infty$, то крайній правий член останньої нерівності прямує до 1. Отже, рівність (56) доведено.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{n+1} < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1.$$

Звідси випливає рівність (57).

$$\sum_{n=1}^{K}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{K}\ln\frac{n+1}{n}=\sum_{n=1}^{K}(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(K+1).$$

Якщо $K \to +\infty$, то відповідна часткова сума ряду прямує до $+\infty$, тому маємо:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

Водночас маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \quad \Rightarrow \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad -$$

для всіх $\alpha \in (0;1]$. Звідси випливає рівність (58).

Для всіх $\beta \geq 2$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n^\beta} \leq \sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n^2} < 1+\sum_{n=2}^{K}\frac{1}{n(n-1)} = 1+\sum_{n=2}^{K}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) =$$
$$= 2-\frac{1}{K} < 2.$$

Звідси випливає нерівність (59).

Для всіх натуральних $n$ маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \quad \Rightarrow \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0;$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \quad \Rightarrow \quad (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

тому отримаємо:

$$0 < c = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) < \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

*Стала Ейлера c* — міра відхилення часткових сум *гармонійного ряду*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

від натурального логарифма кількості доданків.

# Розділ 6. Аналітична геометрія

## 6.1. Координатна площина

Проведемо на площині через точку $O$, яку називатимемо *початком координат,* дві взаємно перпендикулярні прямі — *осі координат.* Одну з них (як правило, горизонтальну) називають віссю абсцис $x$, а іншу — віссю ординат $y$. На кожній з осей задамо структуру числової прямої, вибравши додатний напрям, який позначатимемо стрілкою, та одиницю довжини, що є однаковою для обох осей.

За (додатний) напрям вимірювання кутів виберемо той, за яким додатний напрям осі ординат (промінь) отримується з додатного напряму осі абсцис обертанням навколо $O$ на кут $\pi/2$. Традиційно на рисунках вісь абсцис горизонтальна, а її додатний напрям — зліва направо, вісь ординат вертикальна, а її додатний напрям — знизу вгору, кути вимірюються проти руху годинникової стрілки. Зауважимо, що означити поняття "горизонтально", "вертикально", "ліворуч", "праворуч", "вгору", "вниз", "за" чи "проти руху годинникової стрілки" можна лише на побутовому рівні, користуючись ілюстраціями.

Через довільну точку $A$, що не належить до осі ординат, проведемо пряму паралельно осі ординат до перетину в точці $A_x$ з віссю абсцис. Дійсне число $x$, що відповідає точці $A_x$ — проекції $A$ на вісь абсцис паралельно осі ординат, називають *абсцисою* точки $A$. Якщо $A$ належить до осі ординат, то вважаємо, що $x = 0$.

Ординату визначають аналогічно. Через точку $A$, якщо вона не належить до осі абсцис, проведемо пряму паралельно осі абсцис до перетину в точці $A_y$ з віссю абсцис. Дійсне число $y$, що відповідає точці $A_y$ — проекції $A$ на вісь ординат паралельно осі абсцис, називають *ординатою* точки $A$. Якщо $A$ належить до осі абсцис, то вважаємо, що $y = 0$.

*(Декартові*[1] *) координати* точки — абсцису та ординату — записують у круглих дужках через крапку з комою (спочатку абсцису,

[1] На честь французького вченого Рене Декарта (1596–1650).

потім ординату) поряд з літерою, що позначає точку (див. рис. 5–6). Наприклад: $A(x; y)$.

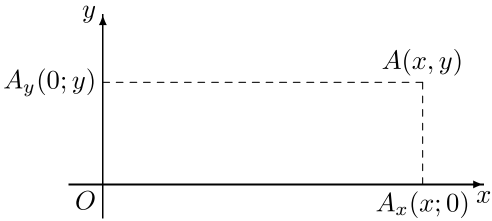



*Рис. 5.* Визначення декартових координат на площині.

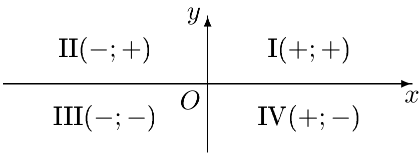



*Рис. 6.* Поділ площини осями координат на чотири чверті: I, II, III, IV (нумерація — проти руху годинникової стрілки). У межах кожної чверті знаки обох координат сталі.

Площину, на якій координати задано таким способом, називають *декартовою координатною площиною,* а координати — декартовими. Надалі координати розумітимемо саме як декартові координати.

Існує взаємно однозначна відповідність між точками координатної площини та впорядкованими парами дійсних чисел.

Перетворення координат $(x; y) \to (x; -y)$ і $(x; y) \to (-x; y)$ задають симетрію відносно осей відповідно абсцис і ординат. Центральна симетрія відносно початку координат $(x; y) \to (-x; -y)$ — композиція симетрій відносно осей координат.

**Теорема 60.** *Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ координатної площини дорівнює: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.*

**Доведення.** Довжини проекцій відрізка $[A; B]$ на дві взаємно перпендикулярні прямі дорівнюють $|x_2 - x_1|$ та $|y_2 - y_1|$, тому за теоремою Піфагора[1] отримаємо: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

[1] Піфагор (близько 570–500 р. до н. е.) — давньогрецький математик і філософ.

**Наслідок 11.** $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *— рівняння кола з центром у точці* $(a;b)$ *і радіусом* $r$.

## 6.2. Вектори

*Вектором* називають *спрямований відрізок* — впорядковану пару точок площини чи простору. На рисунку вектор позначають стрілкою, у формулах — однією малою або двома великими латинськими літерами з рискою чи стрілкою над ними: $\bar{v}$, $\vec{v}$, $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$. Останні два позначення використовують для векторів, спрямованих з точки $A$ в точку $B$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають:

- однаково спрямованими, якщо *промені* $AB$ та $CD$ можна сумістити паралельним перенесенням;

- протилежно спрямованими, якщо вони лежать на паралельних прямих і не є однаково спрямованими;

- колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих.

*Кут між векторами* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює куту між променями зі спільним початком $O$, що містять відповідно вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

*Абсолютною величиною (модулем) вектора* $\vec{v}$ — спрямованого відрізка — називають довжину цього відрізка, яку позначають через $|\vec{v}|$.

Якщо початок вектора — його кінець, то напрям вектора не визначений. Такий вектор називають *нульовим* і позначають $\vec{0}$ або 0.

Вектори називають *рівними,* якщо вони однаково спрямовані й мають однакову абсолютну величину. Інакше кажучи, якщо їх можна сумістити паралельним перенесенням.

Для кожного вектора $\vec{v}$ існує єдиний рівний йому вектор $\vec{w}$, початок якого — початок координат. Прямокутні трикутники з рівними й однаково спрямованими гіпотенузами $\vec{v}$, $\vec{w}$ і катетами, паралельними осям координат, рівні. Координати кінця вектора $\vec{w}$ дорівнюють різницям відповідних координат кінця та початку вектора $\vec{v}$ і називають координатами вектора $\vec{v}$. Їх записують поряд з літерним позначенням вектора, як і координати точок, або взагалі не записують.

Для точок $A(a_1; a_2)$ та $B(b_1; b_2)$ координатної площини допустимі такі позначення:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2) = \overrightarrow{(b_1 - a_1; b_2 - a_2)} = \vec{v}(b_1 - a_1; b_2 - a_2).$$

Вектор однозначно визначається своїми координатами, тому вектори рівні тоді й лише тоді, коли вони мають рівні координати.

*Сумою векторів* (див. рис. 7–8) називають вектор, координати якого — суми відповідних координат доданків:

$$\vec{v}(x_1; y_1) + \vec{u}(x_2; y_2) = \vec{w}(x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

Для довільних точок координатної площини $A$, $B$, $C$ маємо:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

що випливає з означення суми векторів через їхні координати.

*"Правило трикутника"*: сума двох векторів $\vec{v}+\vec{u}$ — вектор, спрямований з початку першого $\vec{v}$ у кінець другого $\vec{u}$ за умови, що кінець першого та початок другого збігаються (див. рис. 7).

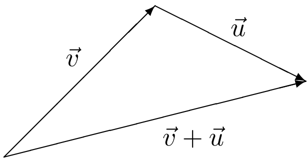



*Рис. 7.* "Правило трикутника".

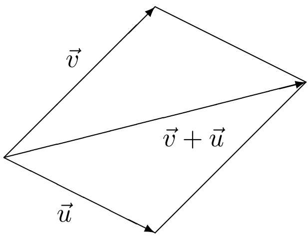



*Рис. 8.* "Правило паралелограма".

*“Правило паралелограма”*: для векторів зі спільним початком суму можна подати діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах зі спільним початком (див. рис. 8).

*Різницею векторів* називають вектор, координати якого — різниці відповідних координат цих векторів:

$$\vec{v}(x_1; y_1) - \vec{u}(x_2; y_2) = \vec{w}(x_1 - x_2; y_1 - y_2).$$

Побудуємо різницю $\vec{v} - \vec{u}$ з використанням правила трикутника для суми $\vec{u} + (\vec{v} - \vec{u})$. Від однієї точки потрібно відкласти вектори $\vec{v}$ і $\vec{u}$. Шуканою різницею є вектор, початок якого збігається з кінцем $\vec{u}$, а кінець — з кінцем $\vec{v}$ (див. рис. 9).

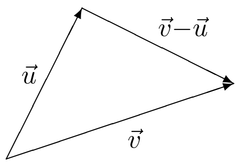



*Рис. 9.* Побудова різниці $\vec{v} - \vec{u}$ з використанням правила трикутника.

*Добутком вектора на число* називають вектор, координати якого — добутки цього числа і відповідних координат вектора-множника:

$$\lambda\vec{v}(a; b) = \vec{u}(\lambda a; \lambda b).$$

Абсолютна величина добутку вектора на число дорівнює добутку абсолютних величин співмножників: $|\lambda\vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$. Якщо $\vec{v} \neq 0$, то $\vec{v}$ і $\lambda\vec{v}$ однаково спрямовані для $\lambda > 0$ і протилежно спрямовані для $\lambda < 0$.

*Скалярним добутком двох векторів* у декартовій системі координат називають суму добутків відповідних координат векторів:

$$\vec{v}(x_1; y_1) \cdot \vec{u}(x_2; y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Скалярний добуток вектора на самого себе дорівнює квадрату його довжини:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2.$$

У полі дійсних чисел справджуються сполучний, переставний і розподільний закони, тому:

$$\begin{aligned}
(\vec{v}+\vec{u})+\vec{w} &= \vec{v}+(\vec{u}+\vec{w});\\
\vec{v}+\vec{u} &= \vec{u}+\vec{v};\\
\alpha(\vec{v}+\vec{u}) &= \alpha\vec{v}+\alpha\vec{u};\\
(\alpha+\beta)\vec{v} &= \alpha\vec{v}+\beta\vec{v};\\
\vec{v}\cdot\vec{u} &= \vec{u}\cdot\vec{v};\\
(\alpha\vec{v})\cdot\vec{u} &= \alpha(\vec{v}\cdot\vec{u});\\
\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{w}) &= \vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w}.
\end{aligned}$$

Достатньо порівняти ліві та праві частини рівностей, використовуючи подання векторів за допомогою координат.

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{u} &= \frac{1}{2}\left((\vec{v}+\vec{u})\cdot(\vec{v}+\vec{u})-\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{u}\right) =\\
&= \frac{1}{2}\left(|\vec{v}+\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2\right),
\end{aligned}$$

тому *величина скалярного добутку не залежить від вибору напряму осей координат.*

Виберемо систему координат таким чином, щоб додатний напрям осі абсцис збігався з напрямом першого співмножника $\vec{v}$ скалярного добутку $\vec{v}\cdot\vec{u}$. У вибраній системі координат координати векторів дорівнюють $\vec{v}(|\vec{v}|;0)$ та $\vec{u}(|\vec{u}|\cos\varphi;|\vec{u}|\sin\varphi)$, де $\varphi=(\widehat{\vec{v}\ \vec{u}})$ — кут між векторами $\vec{v}$ та $\vec{u}$. Маємо:

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\varphi.$$

Отже, *скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку їхніх абсолютних величин на косинус кута між ними,* тобто добутку абсолютної величини одного вектора $|\vec{v}|$ і перпендикулярної проекції іншого вектора на цей вектор — $|\vec{u}|\cos\varphi$.

## 6.3. Рівняння прямої на площині

Для будь-якої прямої з координатної площини існує вектор $\vec{v}(\alpha;\beta)$ довжини 1:

$$|\vec{v}|^2=\alpha^2+\beta^2=1, \tag{61}$$

спрямований від початку координат до прямої[1] і перпендикулярний до неї. Вектор єдиний, якщо пряма не проходить через початок координат, і його визначають з точністю до напряму в іншому разі. Позначимо через

$$\delta \geq 0 \tag{62}$$

відстань від початку координат до даної прямої, через $M(x_0; y_0)$ — довільну точку координатної площини, через $M'$ — її проекцію на перпендикуляр до прямої, проведений з початку координат. Тоді маємо:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = \alpha x_0 + \beta y_0.$$

Отримана сума — довжина проекції $\overrightarrow{OM}$ на промінь $OM'$, що містить $\vec{v}$ і дорівнює $|\overrightarrow{OM'}|$, якщо $\overrightarrow{OM'}$ та $\vec{v}$ однаково спрямовані. Ця сума дорівнює $-|\overrightarrow{OM'}|$, якщо $\overrightarrow{OM'}$ та $\vec{v}$ протилежно спрямовані (див. рис. 10).

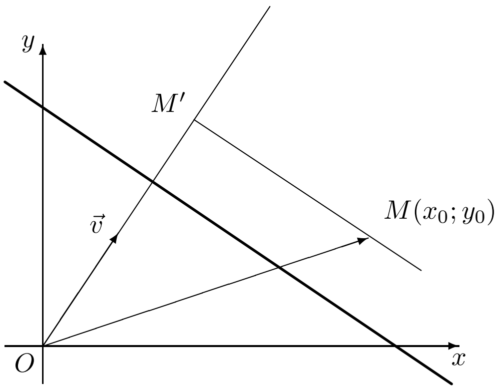



*Рис. 10.* До виведення нормального рівняння прямої.

Таким чином, відстань від точки $M$ до прямої дорівнює:

$$|\alpha x_0 + \beta y_0 - \delta|.$$

Отже, точка $(x; y)$ належить до прямої тоді й лише тоді, коли

$$\alpha x + \beta y - \delta = 0.$$

[1] Промінь, що містить вектор $\vec{v}$ і має з ним спільний початок — початок координат, перетинає пряму.

Отримане рівняння за умов (61–62) називатимемо *нормальним рівнянням прямої на декартовій площині.* Помноживши обидві частини рівняння на дійсне число, відмінне від нуля, отримаємо *загальне рівняння прямої на площині*:

$$Ax + By + C = 0. \tag{63}$$

Якщо $C \neq 0$, то нормальне рівняння отримують з рівняння (63) множенням обох частин рівняння на $-\text{sign } C/\sqrt{A^2 + B^2}$, якщо $C = 0$, то множенням на $1/\sqrt{A^2 + B^2}$. Тому відстань від точки $(x_0; y_0)$ до прямої, яку задано рівнянням (63), дорівнює:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Маємо: $\vec{u}(A; B)$ — вектор, перпендикулярний до прямої, $\vec{w}(B; -A)$ — вектор, паралельний прямій. Якщо $A^2 + B^2 \neq 0$, то нерівності $Ax + By + C > 0$ і $Ax + By + C < 0$ задають на координатній площині півплощини, розділені прямою (63).

*Параметричне рівняння прямої,* що проходить через точку $(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{(l; m)}$, має такий вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}.$$

*Канонічне рівняння*[1] цієї прямої має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

*Рівняння прямої, що проходить через дані різні точки* $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Якщо $ABC \neq 0$, то з рівняння (63) можна отримати *рівняння прямої у відрізках:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

[1] Якщо один із знаменників цього чи наступного рівняння дорівнює 0, то це потрібно розуміти як те, що відповідний чисельник тотожно дорівнює 0, тобто відповідна координата точок прямої стала.

де $a$ — абсциса точки перетину прямої з віссю абсцис, $b$ — ордината точки перетину прямої з віссю ординат (див. рис. 11).

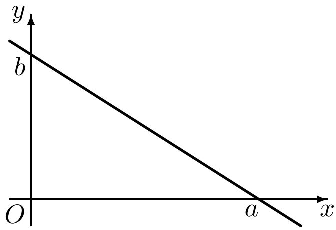



*Рис. 11.* Пряма, що перетинає осі координат у точках $(a; 0)$ і $(0; b)$.

Інколи пряму координатної площини можна подати як *графік функції* $y = kx+b$, де $k = \operatorname{tg} \varphi$ — *кутовий коефіцієнт* — тангенс кута, що вимірюється від додатного напряму осі абсцис до прямої-графіка, $b$ — ордината точки перетину прямої-графіка з віссю ординат.

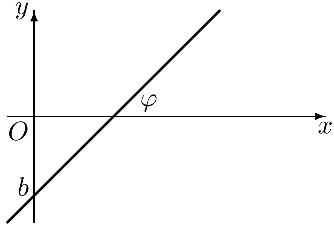



*Рис. 12.* Графік функції $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \varphi$.

## 6.4. Еліпс

**Означення 66.** *Еліпс — множина точок площини, для яких сума відстаней (фокальних радіусів) до двох даних точок площини, які називають фокусами, стала.*

Позначимо відстань між фокусами через $2c$, а суму фокальних радіусів — через $2a$.

1. Для $a < c$ еліпса не існує.

2. Для $a = c$ еліпс вироджується у відрізок, що з'єднує фокуси.

3. Для $a > c$ виведемо рівняння еліпса. Розташуємо фокуси еліпса $F_1$ і $F_2$ на осі абсцис симетрично відносно початку координат відповідно у точках $(c; 0)$ і $(-c; 0)$. Нехай точка $M(x; y)$ належить до еліпса. Тоді маємо:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)} =$$
$$= 4a^2 - (x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 = \sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} & x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + \\ & + 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2 \ = \\ = \ & x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 - 4c^2y^2 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2.$$

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Тоді отримаємо:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{64}$$

Рівняння (64) називають *канонічним рівнянням еліпса* (див. рис. 13).

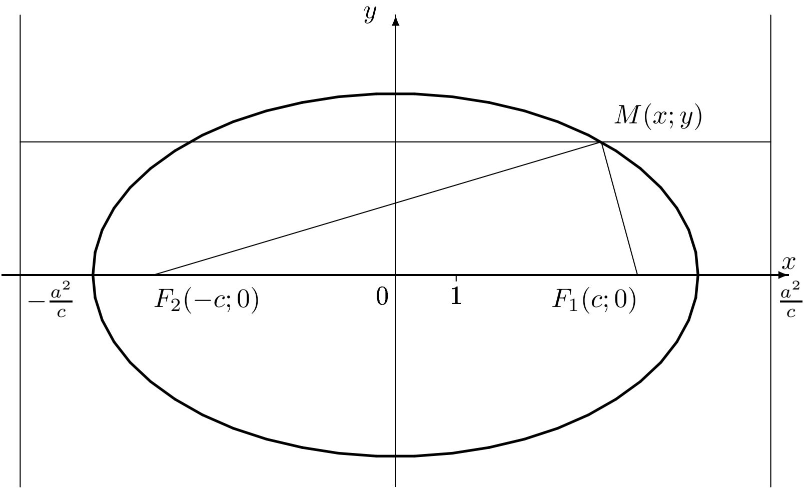



*Рис. 13.* Еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $a=5$, $b=3$, $c=4$, ексцентриситет — $\frac{4}{5}$, абсолютна величина абсцис директриси — $6\frac{1}{4}$.

За умови справдження рівності (64) отримаємо:

$$x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

тому матимемо:

$$2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 = 2a^2 - a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 - y^2 - c^2 = b^2 + \frac{c^2}{b^2}y^2 > 0.$$

Отже, всі перетворення при виведенні рівняння (64) — еквівалентні.

**Теорема 61.** *Для всіх точок еліпса відношення фокального радіуса й відстані до певної відповідної йому прямої стала та дорівнює відношенню відстані між фокусами до суми фокальних радіусів.*

**Доведення.** Обчислимо фокальні радіуси точки $M(x;y)$ еліпса, канонічне рівняння якого — (64).

$$|MF_{1,2}| = \sqrt{(x\mp c)^2+y^2} = \sqrt{x^2 \mp 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{cx}{a} \mp a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} \mp a\right| = \frac{c}{a}\left|x \mp \frac{a^2}{c}\right|,$$

де $|x \mp a^2/c|$ — відстань від точки $M(x;y)$ до прямої, що паралельна осі ординат і проходить через точку $(\pm a^2/c;0)$. Цю пряму називають *директрисою* еліпса, а відношення $c/a < 1$ — його *ексцентриситетом.*

Якщо точка $(x_0;y_0)$ належить до еліпса, рівняння якого — (64), то точка з координатами $x_0' = x_0/a$, $y_0' = y_0/b$ належить до кола з центром у початку координат і радіусом 1. Рівняння цього кола таке:

$$(x')_0^2 + (y')_0^2 = 1. \tag{65}$$

Отже, еліпс (64) отримано "розтягом" в $a$ разів вздовж осі абсцис і в $b$ разів вздовж осі ординат кола (65).

Рівняння дотичної до кола, що має з колом (65) лише одну спільну точку $(x_0';y_0')$, має такий вигляд:

$$x_0'x' + y_0'y' = 1.$$

Ця пряма перпендикулярна до вектора $\vec{v}(x_0';y_0')$ довжини 1 і віддалена від початку координат на одиницю довжини.

Отже, рівняння дотичної до еліпса, що має з еліпсом (64) лише одну спільну точку $(x_0;y_0)$, має вигляд:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

## 6.5. Гіпербола

**Означення 67.** *Гіпербола — множина точок площини, для яких різниця відстаней (фокальних радіусів) до двох даних точок площини (фокусів) стала.*

Позначимо відстань між фокусами через $2c > 0$, а різницю фокальних радіусів — через $2a > 0$.

1. Для $c < a$ гіперболи не існує.

2. Для $a = c$ гіпербола вироджується в об'єднання променів на прямій, що проходить через фокуси. Ці промені не мають спільних точок і починаються у фокусах.

3. Для $c > a$ виведемо рівняння гіперболи. Розташуємо фокуси еліпса $F_1$ і $F_2$ на осі абсцис симетрично відносно початку координат відповідно у точках $(c;0)$ і $(-c;0)$. Нехай точка $M(x;y)$ належить до гіперболи. Тоді маємо:

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 =$$
$$= 2\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} & x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + \\ & + 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2 \ = \\ = \ \ & x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 - 4c^2x^2 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Позначимо $b^2 = c^2 - a^2 > 0$. Тоді отримаємо:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{66}$$

Рівняння (66) називають *канонічним рівнянням гіперболи* (див. рис. 14, на якому також зображено асимптоти — прямі $\{y = \pm bx/a\}$,

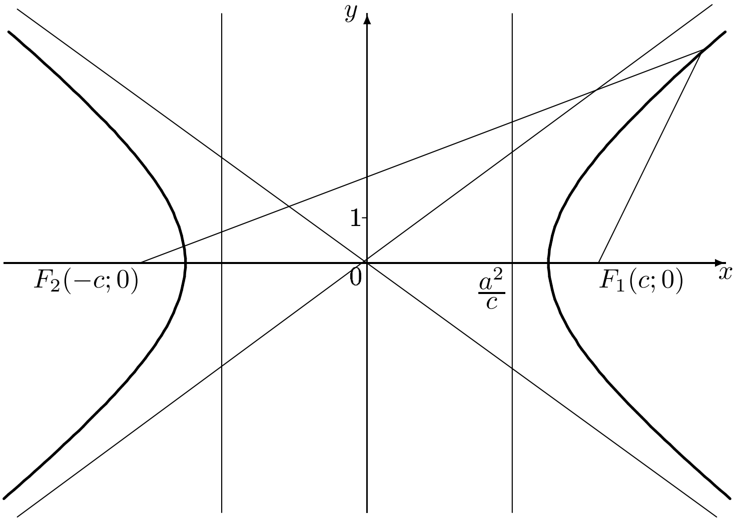



*Рис. 14.* Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, ексцентриситет — $5/4$, абсолютна величина абсцис директриси — $3\frac{1}{5}$.

до яких наближаються точки гіперболи, якщо їхні координати прямують до нескінченності).

За умови справдження рівності (66) маємо:

$$x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

тому:

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \frac{c^2}{b^2}y^2 + b^2 > 0.$$

Отже, всі перетворення при виведенні рівняння (66) — еквівалентні.

**Теорема 62.** *Для всіх точок гіперболи відношення фокального радіуса й відстані до певної відповідної йому прямої стале та дорівнює відношенню відстані між фокусами до суми фокальних радіусів.*

**Доведення.** Обчислимо фокальні радіуси точки $M(x;y)$ гіперболи, канонічне рівняння якої — (66).

$$|MF_{1,2}| = \sqrt{(x \mp c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 \mp 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2} = \left|\frac{cx}{a} \mp a\right| = \frac{c}{a}\left|x \mp \frac{a^2}{c}\right|,$$

де $|x \mp a^2/c|$ — відстань від точки $M(x;y)$ до прямої, що паралельна осі ординат і проходить через точку $(\pm a^2/c; 0)$. Цю пряму називають *директрисою* гіперболи, а відношення $c/a > 1$ — *ексцентриситетом* гіперболи.

## 6.6. Парабола

**Означення 68.** *Парабола — множина точок площини, рівновіддалених від певної прямої (директриси параболи) й певної точки (фокуса параболи).*

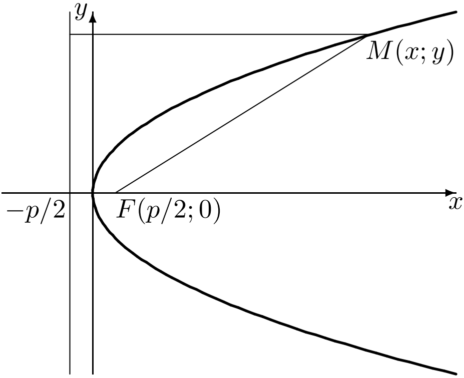



*Рис. 15.* Парабола $y^2 = 2px$.

Позначимо відстань між фокусом та директрисою параболи через $p > 0$. Виберемо систему координат таким чином, щоб фокус $F$ був розташований у точці $(p/2;0)$, а директриса задавалася рівнянням $x = -p/2$. Нехай точка $M(x;y)$ належить до параболи. Тоді отримаємо:

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)+y^2}\Leftrightarrow x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2\Leftrightarrow y^2=2px,$$

де останнє рівняння називають *канонічним рівнянням параболи* (див. рис. 15).

*Ексцентриситет параболи* як відношення *фокального радіуса параболи* (відстані до фокуса) і відстані до директриси параболи дорівнює 1 (див. означення параболи).

## 6.7. Числа Піфагора

**Означення 69.** *Три натуральних числа називають піфагоровими, якщо квадрат одного з них дорівнює сумі квадратів двох інших.*

**Теорема 63.** *Піфагорові числа вичерпуються наборами $m^2+n^2$, $m^2-n^2$, $2mn$, де $m>n$ — натуральні.*

**Доведення.** Задача пошуку всіх піфагорових чисел еквівалентна пошуку всіх точок кола $\{x^2+y^2=1\}$ з додатними раціональними координатами — достатньо поділити два менших піфагорових числа на більше. Піфагорові числа кратні чисельникам і знаменнику $x$ та $y$ за умови, що останні зведено до найменшого спільного знаменника. Для таких $x$ і $y$ кутовий коефіцієнт прямої, що містить точки $(x;y)$ та $(-1;0)$, — раціональне число $n/m$:

$$\frac{y}{1+x}=\frac{n}{m}\ \Leftrightarrow\ y=\frac{n}{m}(1+x),\qquad m,n\in\mathbb{N},$$

бо результат арифметичних дій над раціональними числами — число раціональне. Тоді маємо:

$$\begin{aligned}
m^2(x^2+y^2-1) &= m^2x^2+n^2(1+x)^2-m^2 = \\
&= (m^2+n^2)x^2+2n^2x+n^2-m^2 = \\
&= ((m^2+n^2)x+n^2-m^2)(x+1) = 0.
\end{aligned}$$

Нас цікавлять тільки додатні $x$, тому:

$$x=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\ \Rightarrow\ y=\frac{n}{m}(1+x)=\frac{n}{m}\cdot\frac{2m^2}{m^2+n^2}=\frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

## 6.8. Координатний простір

Візьмемо 3 взаємно перпендикулярні прямі простору (надалі — координатні прямі — осі абсцис $Ox$, ординат $Oy$ та *аплікат* $Oz$), що перетинаються у точці $O$ (надалі — *початок координат*). На кожній з прямих задамо структуру числової прямої з однією одиницею довжини. Площини $yOz$, $xOz$, $xOy$, утворені парами прямих, що перетинаються: $Oy$ і $Oz$, $Ox$ і $Oz$, $Ox$ і $Oy$, називають *координатними площинами*. Для координатних площин допустимі також позначення $yz$, $xz$ і $xy$, які й будемо використовувати надалі.

Координати точки простору $x$, $y$, $z$ — абсцису, ординату та аплікату відповідно — визначатимемо таким чином: через задану точку паралельно до координатних площин $yz$, $xz$, $xy$ проведемо площини до перетину з координатними прямими $Ox$, $Oy$, $Oz$ у точках $A_x$, $A_y$, $A_z$ відповідно (див. рис. 16). Числа, що відповідають точкам перетину, і будуть координатами точки $A$. Якщо ж точка належить до координатної площини, то відповідна координата дорівнює нулю.

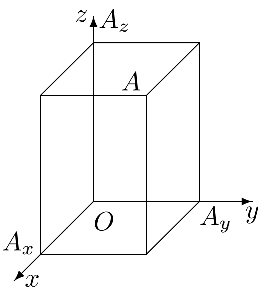



*Рис. 16.* Визначення декартових координат у просторі.

Означення вектора, його координат, форма запису координат вектора й точки, означення дій над векторами й кута між ними у просторі аналогічні до означень для координатної площини.

Перетворення координат

$$(x; y; z) \to (x; y; -z), \quad (x; y; z) \to (x; -y; z), \quad (x; y; z) \to (-x; y; z)$$

задають симетрію відносно координатних площин $xy$, $xz$, $yz$ відповідно. Центральна симетрія відносно початку координат:

$$(x; y; z) \to (-x; -y; -z) \quad —$$

композиція дзеркальних симетрій відносно всіх координатних площин.

Часто вживаними є такі позначення: $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$ та $\vec{k}(0;0;1)$ — для взаємно перпендикулярних векторів довжини 1. При цьому систему координат вибирають таким чином, щоб ця трійка векторів мала *додатну орієнтацію:* якщо початки всіх векторів сумістити, то з кінця $\vec{k}$ видимий поворот від напряму вектора $\vec{i}$ до суміщення з напрямом $\vec{j}$ здійснюється за обраним додатним напрямом вимірювання кутів у площині векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$ на кут $\varphi \in [0; \pi)$. У прямокутній системі координат такий поворот надалі називатимемо ***поворотом навколо напряму*** $\vec{k}$.

Знайдемо відстань між точками $A(a_1; a_2; a_3)$ і $B(b_1; b_2; b_3)$. Через дані точки проведемо прямі паралельно осі аплікат до перетину з координатною площиною $xy$ в точках $A'(a_1; a_2; 0)$ і $B'(b_1; b_2; 0)$. Через точку $A$ паралельно координатній площині $xy$ проведемо площину $\alpha$, що перетне відрізок $[B; B']$ у точці $C(b_1, b_2, a_3)$ (див. рис. 17). Тоді $[A; C] \perp [B; B']$, звідси отримаємо:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 = |A'B'|^2 + |BC|^2 = \\ &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2. \end{aligned}$$

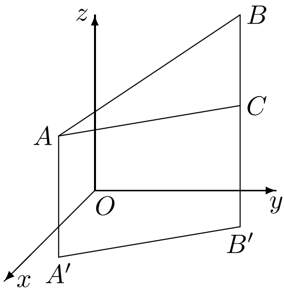



*Рис. 17.* Визначення відстані між точками декартового простору.

*Канонічне рівняння сфери* радіуса $r$ з центром в $(x_0; y_0; z_0)$ має такий вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Для точок $A(x_0; y_0; z_0)$ і $B(x_1; y_1; z_1)$ знайдемо $C(x; y; z)$, що ділить відрізок $[A; B]$ у пропорції $\lambda$:

$$C \in [A; B] \ \wedge \ |AC| : |CB| = \lambda.$$

Точки $A$, $B$, $C$ належать до однієї прямої, тому маємо:

$$\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0).$$

Тоді отримаємо:

$$\lambda = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\alpha|AB|}{(1-\alpha)|AB|} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)},$$

звідси:

$$\alpha = \lambda - \lambda\alpha \ \Leftrightarrow \ \alpha(1+\lambda) = \lambda \ \Leftrightarrow \ \alpha = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Водночас маємо:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC},$$

що в координатному поданні набирає такого вигляду:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}(x_1 - x_0) \ = \ \dfrac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda}; \\ y & = & y_0 + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}(y_1 - y_0) \ = \ \dfrac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda}; \\ z & = & z_0 + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}(z_1 - z_0) \ = \ \dfrac{z_0 + \lambda z_1}{1+\lambda}. \end{array}$$

## 6.9. Рівняння площини у просторі

Для довільної площини у просторі існує вектор $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ довжини 1, спрямований від початку координат до площини[1] і перпендикулярний до неї. Цей вектор визначають однозначно для площини,

[1] Промінь, що містить вектор $\vec{v}$ і має з ним спільний початок — початок координат, перетинає площину.

якщо вона не проходить через початок координат, і з точністю до напряму, якщо вона проходить. Нехай $\delta \geq 0$ — відстань від початку координат до даної площини, $M(x, y, z)$ — довільна точка координатного простору. Тоді проекція $\overrightarrow{OM}$ на $\vec{v}$ має такий вигляд:

$$\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma) \cdot \overrightarrow{OM}(x; y; z) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Отже, відстань від $M(x; y; z)$ до площини дорівнює $|\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta|$.

*Нормальне рівняння* цієї площини має такий вигляд:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0. \tag{67}$$

Помноживши обидві частини рівняння (67) на довільне дійсне число, відмінне від нуля, отримаємо рівняння *загального вигляду:*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{68}$$

де $|A| + |B| + |C| \neq 0$. З рівняння (68) можна отримати нормальне рівняння, поділивши обидві частини рівності на $-\operatorname{sign} D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, якщо $D \neq 0$, і на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, якщо $D = 0$.

*Відстань від точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до площини,* що задається рівнянням (68), дорівнює:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Якщо всі коефіцієнти загального рівняння площини відмінні від нуля, то його можна звести до *рівняння у відрізках,* що має такий вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

## 6.10. Рівняння прямої у просторі

Виведення всіх рівнянь прямої ґрунтується на тому, що точка $C$ належить прямій $(AB)$ тоді й лише тоді, коли $(AC) || (AB)$.

*Параметричне* рівняння прямої, що проходить через дану точку $(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{v}(l; m; n)$, має такий вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \qquad t \in (-\infty; +\infty).$$

*Канонічне* рівняння[1] цієї прямої має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{69}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві різні точки $(x_0; y_0; z_0)$ і $(x_1; y_1; z_1)$, має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Пряму можна задати як перетин площин за допомогою такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Ця пряма існує, якщо площини $\{A_jx + B_jy + C_jz + D_j = 0\}$, $j = 1, 2$ не паралельні. Це можливо лише за умови непаралельності перпендикулярів до площин $\vec{v}_1(A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{v}_2(A_2; B_2; C_2)$.

## 6.11. Кути між площинами, між прямими, між прямою та площиною

Кут між площинами, які задано такими рівняннями:

$$A_jx + B_jy + C_jz + D_j = 0, \qquad j = 1, 2,$$

дорівнює куту між перпендикулярами до них, а його косинус обчислюють так:

$$\frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Косинус кута між прямими, паралельними $\vec{v}_1(l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{v}_2(l_2; m_2; n_2)$, дорівнює відношенню:

$$\frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

[1] Якщо один зі знаменників цього чи наступного рівняння дорівнює 0, то це потрібно розуміти як те, що відповідний чисельник тотожно дорівнює 0, тобто відповідна координата точок прямої стала.

Кут між прямою і площиною, заданими відповідно рівняннями (69) і (68), доповнює до $\pi/2$ кут між прямою та перпендикуляром до площини, а його синус дорівнює такому відношенню:

$$\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

## 6.12. Паралельне проектування

**Означення 70.** ***Точка $M'$ — проекція точки $M$ на площину $\alpha$ паралельно прямій $a$, якщо*** $M'\in\alpha \wedge (MM')||a$.

Рівняння для знаходження $M(x_0+lt;y_0+mt;z_0+nt)$ — проекції $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на площину (68) паралельно вектору $\vec{v}(l;m;n)$ — має такий вигляд:

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0.$$

**Означення 71.** ***Точка $M'$ — проекція точки $M$ на пряму $a$ паралельно площині $\alpha$, якщо*** $M'\in a \wedge (MM')||\alpha$.

Рівняння для визначення $M(x_0+lt;y_0+mt;z_0+nt)$ — проекції точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ на пряму (69) паралельно площині (68) — має такий вигляд:

$$A(x_0+lt-x_1)+B(y_0+mt-y_1)+C(z_0+nt-z_1)=0.$$

*Кабінетна проекція* — така паралельна проекція декартового координатного простору на площину, при якій дві координатні осі проектують у взаємно перпендикулярні прямі зі збереженням довжини відрізків вздовж цих осей. Ці проекції утворюють рівні кути по $135°$ з проекцією третьої осі, при проектуванні якої відстані зменшуються вдвічі вздовж неї. Такою є, наприклад, проекція координатного простору на координатну площину $yz$ паралельно вектору $\vec{v}(-2\sqrt{2};1;1)$ (див. рис. 18):

$$(x;y;z)\to\left(-\frac{x}{2\sqrt{2}}+y;-\frac{x}{2\sqrt{2}}+z\right).$$

*Ізометрична проекція* — зображення простору на площині, в якому координатні осі декартового простору відображають у прямі, що утворюють кути по $120^\circ$ одна з одною, зі збереженням довжин відрізків вздовж кожної осі координат. Ізометричну проекцію можна отримати таким відображенням координатного простору на координатну площину:

$$(x; y; z) \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(y-x); z - \frac{x+y}{2}\right).$$

Таке відображення — проекція на площину $\{x+y+z=0\}$ перпендикулярно до неї з подальшою гомотетією (розтягом) в $\sqrt{3/2}$ разу відносно проекції початку координат (див. рис. 18).

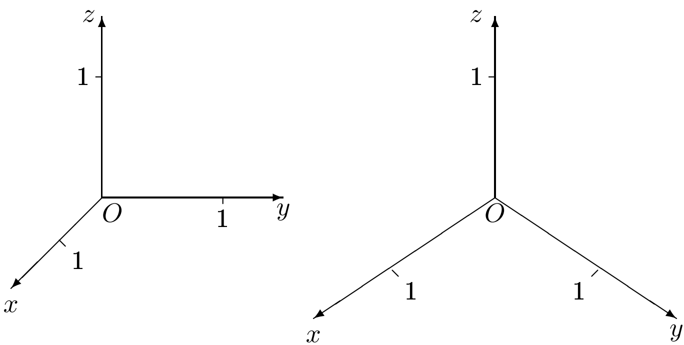



*Рис. 18.* Кабінетна (ліворуч) й ізометрична (праворуч) проекції координатних осей.

## 6.13. Площа проекції паралелограма

**Означення 72.** *Для будь-яких дійсних $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ означимо визначник 2-го порядку:*

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1. \tag{70}$$

**Теорема 64.** *Площа ортогональної проекції на площину $xy$ паралелограма, сторони якого — вектори $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ і $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, дорівнює абсолютній величині виразу (70).*

**Доведення.** Зауважимо, що шукана площа дорівнює площі паралелограма, сторони якого — вектори $\vec{v}_1(b_1; b_2; 0)$ і $\vec{v}_2(c_1; c_2; 0)$ — відповідно проекції $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Нехай $\varphi$ — кут між векторами $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Тоді шукана площа дорівнює:

$$\begin{aligned}
& |\vec{v}_1|\ |\vec{v}_2| \sin\varphi \ = \ |\vec{v}_1|\ |\vec{v}_2|\sqrt{1-\cos^2\varphi} \ = \\
= \ & |\vec{v}_1|\ |\vec{v}_2|\sqrt{1-\left(\frac{(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)}{|\vec{v}_1|\ |\vec{v}_2|}\right)^2} \ = \ \sqrt{|\vec{v}_1|^2|\vec{v}_2|^2-(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)^2} \ = \\
= \ & \sqrt{(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)-(b_1c_1+b_2c_2)^2} \ = \\
= \ & \sqrt{b_1^2c_1^2+b_1^2c_2^2+b_2^2c_1^2+b_2^2c_2^2-b_1^2c_1^2-b_2^2c_2^2-2b_1b_2c_1c_2} \ = \\
= \ & \sqrt{b_1^2c_2^2-2b_1b_2c_1c_2+b_2^2c_1^2} \ = \ |b_1c_2-b_2c_1|. \qquad (71)
\end{aligned}$$

Цей результат можна отримати з допомогою теореми додавання, яку доведено в розділі 7. Нехай $\varphi_1$, $\varphi_2$ — кути від додатного напряму осі абсцис до напрямів векторів відповідно $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Тоді шукана площа дорівнює: $|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|\cdot|\sin(\varphi_1-\varphi_2)| =$

$$= \ |\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|\cdot|\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2| = |b_1c_2-b_2c_1|.$$

**Лема 7.** *Напрям $\vec{v}_2(c_1; c_2; 0)$ отримують з напряму $\vec{v}_1(b_1; b_2; 0)$ поворотом на кут $\varphi \in (0; \pi)$ навколо напряму $\vec{k}(0; 0; 1)$ тоді й лише тоді, коли справджується така нерівність:*

$$b_1c_2 - b_2c_1 > 0. \qquad (72)$$

**Доведення.** Ліва частина нерівності (72) дорівнює 0 лише за умови колінеарності векторів $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$. При сталих $b_1$ і $b_2$ нерівність (72) задає півплощину кінців векторів $\vec{v}_2(c_1; c_2; 0)$, які виходять з початку координат, і кінці яких лежать з одного боку від прямої, що паралельна вектору $\vec{v}_1$ і містить початок координат. Якщо вираз (71) відмінний від 0, то напрям вектора $\vec{u}_2$ можна отримати з напряму $\vec{u}_1$ поворотом навколо $\vec{k}$ на кут у межах від 0 до $\pi$ (одна півплощина напрямів $\vec{u}_2$, що неколінеарні $\vec{u}_1$) або на кут у межах від $\pi$ до $2\pi$ (інша півплощина напрямів $\vec{u}_2$, що неколінеарні $\vec{u}_1$). Для завершення доведення розглянемо вектор $\vec{w}(-b_2; b_1; 0)$, який отримують з $\vec{v}_1$ поворотом на $\pi/2$ навколо $\vec{k}$:

$$b_1 \cdot b_1 - b_2 \cdot (-b_2) = b_1^2 + b_2^2 > 0.$$

## 6.14. Векторний добуток

**Означення 73.** *$\vec{a}$ — векторний добуток неколінеарних векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (його позначають так: $\vec{b} \times \vec{c}$), якщо:*

- *$|\vec{a}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \widehat{\vec{b}\vec{c}}$ — абсолютна величина добутку дорівнює добутку абсолютних величин співмножників на синус кута між ними (площі паралелограма, сторони якого — вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$);*

- *$\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ — добуток перпендикулярний до площини, утвореної співмножниками;*

- *трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має додатну орієнтацію.*

*Якщо ж $\vec{b} || \vec{c}$, то $\vec{b} \times \vec{c} = 0$.*

*Для позначення векторного добутку $\vec{b} \times \vec{c}$ використовують також позначення $[\vec{b}\ \vec{c}]$.*

**Зауваження 19.** *Якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має додатну орієнтацію, то трійки $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ мають додатну орієнтацію.*

**Означення 74.** *Для довільних дійсних $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $c_1$, $c_2$ $c_3$ означимо визначник 3-го порядку:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2. \quad (73)$$

*Цим же способом обчислення будемо користуватися і тоді, коли $a_1$, $a_2$, $a_3$ — вектори (див. наступну теорему).*

**Теорема 65.** *Якщо:*

- *$\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$, $\vec{k}(0;0;1)$ — взаємно ортогональні вектори довжини 1, що мають додатну орієнтацію;*

- *$\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$ — координати векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$ у системі координат, утвореній векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,* *то:*

$$\begin{aligned}
\vec{b}\times\vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \\
&= \overrightarrow{(b_2c_3 - c_2b_3,\ -b_1c_3 + c_1b_3,\ b_1c_2 - b_2c_1)}.
\end{aligned} \tag{74}$$

**Доведення.** Скалярний добуток $\vec{k}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ — апліката $\vec{b}\times\vec{c}$ — дорівнює добутку $|\vec{b}\times\vec{c}|$ (площі відповідного паралелограма) на $\cos\alpha$. У даному разі $\alpha$ — кут між $\vec{b}\times\vec{c}$, що є перпендикуляром до площини, до якої належать $\vec{b}$ та $\vec{c}$, і $\vec{k}$, що є перпендикуляром до координатної площини $xy$. Отже, $\alpha$ — кут між вказаними площинами або кут, що доповнює його до $\pi$, а абсолютна величина аплікати $\vec{b}\times\vec{c}$ дорівнює площі проекції паралелограма (71): $\vec{k}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{k}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot\cos\alpha = b_1c_2 - b_2c_1$. Якщо цей вираз дорівнює 0, то й апліката $\vec{b}\times\vec{c}$ дорівнює 0, а $\cos\alpha = 0$, якщо при цьому $\vec{b}\times\vec{c} \neq 0$. Тому достатньо пересвідчитися у правильності вибору знака аплікати у розкладі (74).

Апліката $\vec{b}\times\vec{c}$ додатна лише тоді, коли $\cos\alpha > 0$, тобто коли кінці векторів $\vec{k}$ та $\vec{b}\times\vec{c}$ знаходяться з одного боку від площини $xy$ за умови, що їхні початки належать до цієї площини. Напрям $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$ отримують з напряму $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ поворотом на кут у межах від 0 до $\pi$ навколо напряму $\vec{b}\times\vec{c}$, тому для $\cos\alpha > 0$ напрям $\vec{v}_2(c_1;c_2;0)$ отримується з напряму $\vec{v}_1(b_1;b_2;0)$ поворотом на кут у межах від 0 до $\pi$ навколо напряму $\vec{k}$ (див. рис. 19). Це можливо лише тоді, коли справджується нерівність (72). Отже, для додатної аплікати $\vec{b}\times\vec{c}$ її знак у рівностях (74) вибрано правильно.

Міркування для від'ємної аплікати відрізняються лише тим, що у такому разі кінці векторів $\vec{k}$ та $\vec{b}\times\vec{c}$ лежать по різні боки площини $xy$ за умови, що їхні початки належать цій площині. У такому разі напрям $\vec{v}_2(c_1;c_2;0)$ отримують з напряму $\vec{v}_1(b_1;b_2;0)$ поворотом на кут у межах від 0 до $\pi$ навколо напряму $\vec{k}$ *проти додатного напряму вимірювання кутів*, отже: $b_1c_2 - b_2c_1 < 0$.

Міркування для інших координат $\vec{b}\times\vec{c}$ аналогічні.

**Наслідок 12.** *Векторний добуток має такі властивості:*

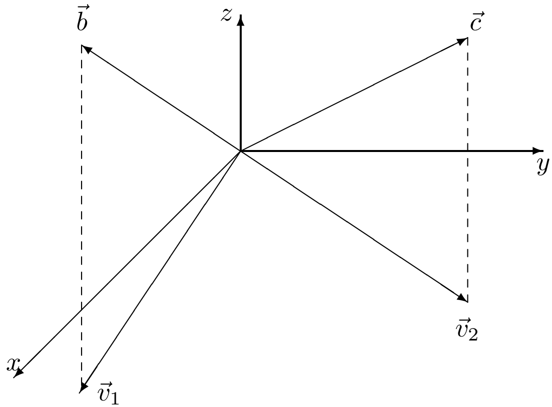



*Рис. 19.* Випадок додатної аплікати $\vec{b} \times \vec{c}$.

*1.* $\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$.

*2.* $(\lambda\vec{b}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{b} \times \vec{c})$.

*3.* $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

*4.* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

*5.* $((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) + ((\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}) + ((\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}) = 0$.

Перша властивість *кососиметричності* і дві наступні *лінійності* векторного добутку — безпосередній наслідок теореми про координатне подання операції векторного множення. З огляду на це четверту властивість достатньо перевірити лише для векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Це легко зробити, скориставшись такими співвідношеннями:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0; \qquad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1;$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

П'яту властивість називають тотожністю Якобі. Вона випливає з властивостей 1–4 і справджується для всіх так званих алгебр Лі, частковий випадок яких — $\mathbb{R}^3$ із заданою операцією векторного множення.

## 6.15. Мішаний добуток

**Означення 75.** *Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — скалярний добуток $\vec{a}$ на $\vec{b}\times\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.*

**Теорема 66.** *Для векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$ мішаний добуток $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ дорівнює:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2,$$

*а його абсолютна величина — об'єм паралелепіпеда, ребра якого дорівнюють $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.*

**Доведення.** Для $\vec{b}\times\vec{c}\,(b_2c_3-c_2b_3, -b_1c_3+c_1b_3, b_1c_2-b_2c_1)$ і $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= a_1(b_2c_3-c_2b_3)+a_2(-b_1c_3+c_1b_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) = \\ &= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-c_1b_2a_3-c_2b_3a_1-c_3b_1a_2. \end{aligned}$$

Абсолютна величина обчисленого мішаного добутку дорівнює добутку площі паралелограма, сторони якого дорівнюють $\vec{b}$ і $\vec{c}$, на довжину проекції $\vec{a}$ на перпендикуляр до площини, утвореної векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Довжина цієї проекції — висота відповідного паралелепіпеда. Абсолютна величина всього мішаного добутку дорівнює об'єму цього паралелепіпеда.

**Наслідок 13.** *Мішаний добуток має такі властивості:*

1. *Мішаний добуток векторів змінює знак на протилежний після переставлення двох співмножників:*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = -\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}).$$

2. *Мішаний добуток векторів не змінюється після циклічного переставлення співмножників:*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

3. *Мішаний добуток векторів лінійний за кожним співмножником.*

4. *Мішаний добуток векторів не залежить від взаємної заміни знаків скалярного й векторного множення:*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

**Наслідок 14.** *Три вектори компланарні, тобто паралельні одній площині, тоді й лише тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.*

**Наслідок 15.** *Якщо точки* $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$ *не лежать на одній прямій, то рівняння площини, яка містить ці точки, має такий вигляд:*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

## 6.16. Геометричний зміст системи лінійних рівнянь

**Означення 76.** *Лінійне рівняння* $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ *називають невиродженим, якщо хоча б один з коефіцієнтів при змінних* $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ *відмінний від нуля:* $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| \neq 0$.

**Зауваження 20.** *Невироджене лінійне рівняння відносно двох змінних задає пряму на площині, а відносно трьох змінних — площину в координатному просторі.*

Для системи двох невироджених лінійних рівнянь відносно двох змінних

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

можливі такі випадки:

1. Якщо відповідні прямі збігаються, тобто коефіцієнти рівнянь пропорційні: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1 = 0$, то існує безліч розв'язків, заданих одним з рівнянь.

2. Якщо відповідні прямі паралельні, тобто $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, але $b_1a_{22} - a_{12}b_2 \neq 0 \vee b_2a_{21} - a_{11}b_1 \neq 0$, то система несумісна[1].

3. Якщо відповідні прямі не паралельні, а координати векторів $\vec{v}_1(a_{11}; a_{12})$ і $\vec{v}_2(a_{21}; a_{22})$, перпендикулярних до прямих, не пропорційні: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то існує єдиний розв'язок:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**Зауваження 21.** *В істинності цих рівностей легко пересвідчитися, знайшовши різниці обох частин рівнянь, помножених відповідно на* $a_{22}$ *і* $a_{12}$ *чи на* $a_{21}$ *і* $a_{11}$. *У курсі вищої алгебри доводиться рівність, що виражає єдиний розв'язок системи лінійних рівнянь через коефіцієнти рівнянь за допомогою визначників — спеціальних функцій коефіцієнтів рівнянь, і вивчаються властивості визначників. Загальноприйнята форма запису аргументів відповідного визначника — запис таблиці коефіцієнтів між двома вертикальними рисками, як у співвідношеннях (70) і (73), де записано правила обчислення визначників 2-го та 3-го порядків.*

Для системи трьох невироджених лінійних рівнянь відносно трьох змінних

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

можливі такі випадки:

1. Якщо коефіцієнти всіх рівнянь пропорційні, тобто всі відповідні площини збігаються, то система має безліч розв'язків, заданих одним лінійним рівнянням.

2. Якщо коефіцієнти двох рівнянь пропорційні, а третього — ні, а система сумісна, то дві площини збігаються й перетинаються з третьою по прямій.

3. Якщо коефіцієнти двох рівнянь пропорційні, а система несумісна, то дві площини збігаються й паралельні третій.

---

[1] Тут і надалі систему рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною* — якщо вона не має розв'язків.

4. Якщо два рівняння несумісні між собою, але кожне з них сумісне з третім, то дві паралельні площини перетинаються третьою.

5. Якщо кожна пара рівнянь несумісна, то всі площини паралельні.

6. Якщо кожна пара рівнянь сумісна, а вся система — ні, то пари площин перетинаються по паралельних прямих.

7. Якщо коефіцієнти рівнянь не пропорційні, але система має безліч розв'язків, то три площини перетинаються по прямій.

8. У всіх інших випадках система має єдиний розв'язок:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Щоб пересвідчитися у справдженні останніх рівностей, достатньо обчислити суми правих і лівих частин рівнянь системи, помножених відповідно на:

а) $+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ для знаходження $x$;

б) $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ для знаходження $y$;

в) $+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ для знаходження $z$.

# Розділ 7. Елементарні функції

## 7.1. Властивості функцій

У цьому розділі розглянемо функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Існують такі способи задання функції:

- за допомогою таблиці, де для скінченної кількості значень аргументу вказано значення функції;
- за допомогою *графіка*[1] *функції — множини всіх точок координатної площини* $(x; y)$, *для яких* $y = f(x)$;
- словесний (алгоритмічний), що задає опис знаходження значення функції $f(x)$ для кожного елемента $x$ множини визначення $D(f)$;
- аналітичний, що задає залежність значення фунції від аргументу за допомогою аналітичного виразу — формули, що містить символи арифметичних дій, піднесення до степеня, добування кореня, символи елементарних функцій (логарифмічної, тригонометричних та обернених тригонометричних).

**Означення 77.** *Будемо вважати, що функція* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

- *неперервна в точці* $x \in D(f)$, *якщо для довільної послідовності* $\{x_n\}$ *елементів* $D(f)$, *що збігається до* $x$, $f(x_n)$ *збігається до* $f(x)$
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x);$$
- *розривна в точці* $x \in D(f)$, *якщо* $f$ *не є непервною в точці* $x$*;*
- *неперервна на множині, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини;*

[1] Насправді на практиці подається ескіз (наближений рисунок) графіка, що наочно відображає властивості функції.

- *періодична, якщо існує таке додатне $T$, при якому значення функції не змінюється при збільшенні аргументу на $T$:*

$$\exists\ T > 0 \quad \forall\ x \in D(f) \quad (x+T) \in D(f)\ \wedge\ f(x+T) = f(x).$$

  *Найменше з таких чисел називають (основним) періодом функції $f$. Графік періодичної функції не змінюється при паралельному перенесенні на величину періоду вздовж осі абсцис;*

- *парна, якщо для будь-якого елемента $x$ області визначення $-x$ також належить до області визначення, причому*

$$f(-x) = f(x),$$

  *тобто графік парної функції симетричний відносно осі ординат;*

- *непарна, якщо для будь-якого елемента $x$ області визначення $-x$ також належить до області визначення, причому*

$$f(-x) = -f(x),$$

  *тобто графік непарної функції симетричний відносно початку координат;*

- *зростає, якщо значення функції зростає при збільшенні аргументу:*

$$\forall\ x_1, x_2 \in D(f) \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2);$$

- *спадає, якщо значення функції спадає при збільшенні аргументу:*

$$\forall\ x_1, x_2 \in D(f) \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2);$$

- *не зростає, якщо значення функції не зростає при збільшенні аргументу:*

$$\forall\ x_1, x_2 \in D(f) \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2);$$

- *не спадає, якщо значення функції не спадає при збільшенні аргументу:*

$$\forall\ x_1, x_2 \in D(f) \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2).$$

*В останніх чотирьох випадках кажуть, що функція монотонна, з них у двох перших — строго монотонна. Інколи монотонність розуміють саме як строгу монотонність функції.*

**Зауваження 22.** *Якщо від правої та лівої частин строгої нерівності як від аргументів визначити значення функції, що зростає, то отримаємо нерівність того самого змісту. Якщо функція спадна, то нерівність змінює зміст на протилежний: знак $>$ змінюється на $<$, і навпаки.*

**Означення 78.** *Для дійсного $a$ і додатного дійсного $\varepsilon$ означимо $\varepsilon$-окіл точки $a$ як $\{x \in \mathbb{R} \mid \quad |x-a| < \varepsilon\}$ — множину всіх дійсних $x$, відстань від яких до $a$ менша, ніж $\varepsilon$.*

**Означення 79.** *Будемо вважати, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

- *має локальний максимум у точці $x_0$, якщо вона визначена в $x_0$, й існує непорожній перетин $\varepsilon$-околу цієї точки з областю визначення $f$, у кожній точці $x$ якого значення функції $f$ не більші, ніж $f(x_0)$:*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in D(f) \quad |x - x_0| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \le f(x_0); \tag{75}$$

- *має локальний мінімум у точці $x_0$, якщо вона визначена в $x_0$, й існує непорожній перетин $\varepsilon$-околу цієї точки з областю визначення $f$, у кожній точці $x$ якого значення функції $f$ не менші, ніж $f(x_0)$:*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in D(f) \quad |x - x_0| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \ge f(x_0). \tag{76}$$

*Якщо нерівності (75–76) — строгі, то ведуть мову відповідно про строгий локальний максимум чи мінімум — екстремум — функції $f$.*

## 7.2. Опуклість множин і функцій

**Означення 80.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *$a$ — внутрішня точка підмножини площини $A$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, при якому всі точки площини, віддалені від $a$ на відстань меншу, ніж $\varepsilon$, належать до $A$.*

*2. Множина $A$ точок площини:*

- *опукла, якщо для будь-яких двох точок з $A$ кожна точка відрізка, що їх з'єднує, належить до $A$;*
- *строго опукла, якщо для будь-яких двох різних точок з $A$ кожна відмінна від них точка відрізка, що їх з'єднує, — внутрішня точка множини $A$.*

Наприклад, круг — опукла і строго опукла підмножина площини, півкруг разом з півколом та діаметром, що його обмежують, — опукла множина, що не є строго опуклою.

**Означення 81.** *Неперервна на проміжку $X$ функція $f$ опукла вгору на цьому проміжку, якщо справджується одна з таких умов:*

*а) частина координатної площини $\{(x;y)|\ x \in X,\ y \le f(x)\}$, що знаходиться не вище, ніж графік функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, — опукла множина;*

*б) будь-яка точка відрізка, що з'єднує дві довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована не вище, ніж графік функції:*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad \forall\, t \in [0;1] \quad tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \le f(tx_1+(1-t)x_2);$$

*в) середина відрізка, що з'єднує дві довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована не вище, ніж графік функції:*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

**Означення 82.** *Неперервна на проміжку $X$ функція $f$ опукла вниз на цьому проміжку, якщо справджується одна з таких умов:*

*а) частина координатної площини $\{(x;y)|\ x \in X,\ y \ge f(x)\}$, що знаходиться не нижче, ніж графік функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, — опукла множина;*

*б) будь-яка точка відрізка, що з'єднує дві довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована не нижче, ніж графік функції:*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad \forall\, t \in [0;1] \quad tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \geq f(tx_1+(1-t)x_2);$$

*в) середина відрізка, що з'єднує дві довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована не нижче, ніж графік функції:*

$$\forall\; x_1, x_2 \in X \quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

**Означення 83.** *Неперервна на проміжку $X$ функція $f$ строго опукла вгору на цьому проміжку, якщо справджується одна з таких умов:*

*а) частина координатної площини $\{(x;y)|\ x \in X,\ y \leq f(x)\}$, що знаходиться не вище, ніж графік функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, — строго опукла множина;*

*б) будь-яка відмінна від кінців точка відрізка, що з'єднує дві різні довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована під графіком функції:* $\forall\; x_1, x_2 \in X \quad \forall\; t \in (0;1)$

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; tf(x_1)+(1-t)f(x_2) < f(tx_1+(1-t)x_2);$$

*в) середина відрізка, що з'єднує дві різні довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована під графіком функції:*

$$\forall\; x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

**Означення 84.** *Неперервна на проміжку $X$ функція $f$ строго опукла вниз на цьому проміжку, якщо справджується одна з таких умов:*

*а) частина координатної площини $\{(x;y)|\ x \in X,\ y \geq f(x)\}$, що знаходиться не нижче, ніж графік функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, — строго опукла множина;*

*б) будь-яка відмінна від кінців точка відрізка, що з'єднує дві різні довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована над графіком функції:* $\forall\ x_1, x_2 \in X \quad \forall\ t \in (0;1)$

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2) > f(tx_1 + (1-t)x_2); \qquad (77)$$

*в) середина відрізка, що з'єднує дві різні довільні точки графіка функції $y = f(x)$ на проміжку $X$, розташована над графіком функції:*

$$\forall\ x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

**Зауваження 23.** *Функція зі сталим значенням:*

- *не спадає і не зростає одночасно;*
- *опукла вгору і вниз одночасно, але нестрого.*

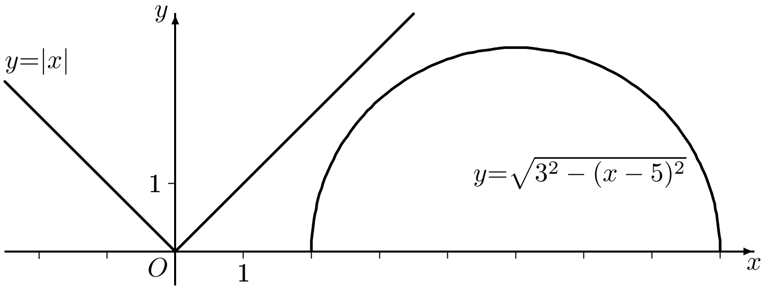



*Рис. 20.* Графіки опуклої вниз на $(-\infty;+\infty)$ функції $y = |x|$ та строго опуклої вгору на [2;8] функції $y = \sqrt{3^2 - (x-5)^2}$.

**Теорема 67.** *Умови (а), (б), (в) в означеннях 81–84 опуклості функції на проміжку еквівалентні.*

**Доведення.** Розглянемо випадок строго опуклої вниз функції. Пересвідчимося, що словесний опис умов (б) та (в) відповідає символьному. Точка $M(x;y)$ координатної площини належить до прямої, що проходить через $M_1(x_1, f(x_1))$ і $M_2(x_2, f(x_2))$ — точки графіка функції $y = f(x)$ — тоді й лише тоді, коли існує таке дійсне $t$, при якому:

$$x = x_2 + t(x_1 - x_2) = tx_1 + (1-t)x_2; \quad (78)$$

$$y = f(x_2) + t(f(x_1) - f(x_2)) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad (79)$$

причому:
$$t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M = M_2;$$
$$t \in [0;1] \quad \Leftrightarrow \quad M \in [M_1; M_2];$$
$$t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad M = M_1,$$

а значення $t = 1 - t = 1/2$ відповідає середині відрізка $[M_1; M_2]$.

Доведемо таке твердження: (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а).

Доведемо, що (а) $\Rightarrow$ (б).

Якщо точка $(tx_1 + (1-t)x_2;\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$ належить до множини $\{(x;y)|\ x \in X,\ y \geq f(x)\}$ разом з деяким своїм $\varepsilon$-околом, то відстань від неї до будь-якої точки графіка функції $y = f(x)$, у тому числі і до $(tx_1 + (1-t)x_2; f(tx_1 + (1-t)x_2))$, більша, ніж $\varepsilon$. У даному разі маємо:

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2) + \varepsilon > f(tx_1 + (1-t)x_2).$$

Доведемо, що (б) $\Rightarrow$ (в). Очевидно, якщо взяти $t = 1/2$.

Доведемо, що (в) $\Rightarrow$ (б). Доведемо твердження (77) спочатку для випадку $t$ — нескоротних дробів вигляду $(2k-1)/2^n \in (0;1)$, де $k$ і $n$ — натуральні (методом математичної індукції за $n$), а потім для всіх дійсних чисел з інтервалу $(0;1)$.

1. Якщо $n = 1$ і $k = 1$, то $t = (2k-1)/2^n = 1/2$.

2. Припустимо, що твердження (77) справджується для всіх дробів $(2k-1)/2^n \in (0;1)$, де $n$ не перевищує деякого натурального $N$, а $k$ — натуральне число у межах від 1 до $2^{n-1}$ включно. Доведемо, що тоді воно справджується і для дробів вигляду $t = (2k-1)/2^{N+1} \in (0;1)$. Маємо:

$$r = t - \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{k-1}{2^N}; \quad s = t + \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{k}{2^N}; \quad t = \frac{r+s}{2},$$

де показники (за основою 2) знаменників нескоротних дробів чисел $r$ і $s$ не перевищують $N$. Згідно з припущенням індукції, маємо:

$$\begin{aligned} rf(x_1)+(1-r)f(x_2) &> f(rx_1+(1-r)x_2); \\ sf(x_1)+(1-s)f(x_2) &> f(sx_1+(1-s)x_2). \end{aligned}$$

Беручи середнє арифметичне від правої та лівої частин нерівностей, отримаємо:

$$\begin{aligned} & tf(x_1)+(1-t)f(x_2) > \\ > & \frac{f(rx_1+(1-r)x_2)+f(sx_1+(1-s)x_2)}{2} > \\ > & f\left(\frac{r+s}{2}x_1+\left(1-\frac{r+s}{2}\right)x_2\right) = f(tx_1+(1-t)x_2), \end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з умови (в).

Згідно з 5-ою аксіомою Пеано, твердження (77) справджується для всіх раціональних чисел з (0;1), знаменники яких — степені 2. Для будь-якого дійсного $t$ з (0;1) можна вказати послідовність саме таких раціональних $t_n$, що збігається до $t$. Наприклад, $t_n$ — лівий кінець відрізка довжини $2^{-n}$, якому належить $t$ і який отримуємо з попереднього відрізка поділом навпіл, починаючи з [0;1]. Зробимо граничний перехід $t_n \to t$ у такій нерівності:

$$t_nf(x_1)+(1-t_n)f(x_2) > f(t_nx_1+(1-t_n)x_2),$$

використавши неперервність функції $f$. Тоді маємо:

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \geq f(tx_1+(1-t)x_2).$$

Доведемо, що ця нерівність строга. Для $t \in (0;1)$ виберемо такі *різні* $r, s \in (0;1)$, при яких $t$ — їхнє середнє арифметичне. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} & tf(x_1)+(1-t)f(x_2) = \\ = & \frac{rf(x_1)+(1-r)f(x_2)+sf(x_1)+(1-s)f(x_2)}{2} \geq \\ \geq & \frac{f(rx_1+(1-r)x_2)+f(sx_1+(1-s)x_2)}{2} > \\ > & f\left(\frac{r+s}{2}x_1+\left(1-\frac{r+s}{2}\right)x_2\right) = f(tx_1+(1-t)x_2). \end{aligned}$$

Доведемо, що (б) $\Rightarrow$ (а) від супротивного. Відмінні від кінців точки відрізка $[L_1(x_1; y_1); L_2(x_2; y_2)] \subset \{(x; y)|\ x \in X,\ y \geq f(x)\}$ розташовані над відрізком $[M_1(x_1; f(x_1)); M_2(x_2; f(x_2))]$, якщо хоча б одна з точок $L_1$ чи $L_2$ розташована вище, ніж графік $y = f(x)$. У даному разі всі вони належать разом із деякими своїми околами до множини $\{(x; y)|\ x \in X,\ y \geq f(x)\}$. Отже, достатньо обмежитися розглядом відрізків, що з'єднують *різні* точки графіка.

Якщо умова (а) не справджується, то існують такий відрізок:

$$[M_1(x_1; f(x_1)); M_2(x_2; f(x_2))] \quad —$$

і його точка $M(x; y)$, відмінна від $M_1$ і $M_2$, при яких будь-який окіл точки $M$ містить точку координатної площини, розташовану *під* графіком функції $y = f(x)$. Таким чином, існують послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, що збігаються відповідно до $x$ та $y$, для яких справджуються нерівності $y_n < f(x_n)$. Зробимо граничний перехід у цих нерівностях, використовуючи неперервність функції $f$. В результаті маємо: $y \leq f(x)$, де координати $x$ і $y$ задаються рівностями (78–79). Все це суперечить умові (б).

Для завершення доведення теореми достатньо зробити такі зауваження:

1. У міркуваннях для нестрого опуклої вниз функції:

   - строгі нерівності потрібно замінити на нестрогі;
   - у доведенні (в) $\Rightarrow$ (б) непотрібно доводити справдження строгої нерівності;
   - у доведенні (б) $\Rightarrow$ (а) потрібно зауважити, що при несправдженні умови (а) існує така точка:

     $$M(x; y) \in [M_1(x_1; f(x_1)); M_2(x_2; f(x_2))],$$

     при якій $y < f(x)$. Це суперечить умові (б) при справдженні рівностей (78–79).

2. При множенні на $-1$ функція зберігає строгість чи нестрогість опуклості, змінюючи її напрям на протилежний: вгору$\to$вниз, вниз$\to$вгору.

**Зауваження 24.** *Поняття внутрішньої точки, опуклості множини і функції можна узагальнити на випадок підмножини* $\mathbb{R}^n$ *й означеної на опуклій підмножині* $\mathbb{R}^n$ *функції* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *якщо запровадити в* $\mathbb{R}^n$ *дії, аналогічні до дій*[1] *з векторами на площині чи у просторі. При цьому:*

- *множина, де опукла вгору функція досягає найбільшого значення, опукла;*
- *множина, де опукла вниз функція досягає найменшого значення, опукла;*
- *максимум строго опуклої вгору функції, якщо він існує, досягається в єдиній точці;*
- *мінімум строго опуклої вниз функції, якщо він існує, досягається в єдиній точці;*
- *локальний максимум опуклої вгору функції є її глобальним максимумом — найбільшим значенням функції;*
- *локальний мінімум опуклої вниз функції є її глобальним мінімумом — найменшим значенням функції.*

Щоб пересвідчитися в істинності цих тверджень, достатньо розглянути опуклу на $[0;1]$ функцію $\varphi(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2)$, де $x_1$, $x_2$ — точки, в яких $f$ досягає найбільшого (найменшого) значення.

## 7.3. Обернена функція

**Теорема 68.** *Для будь-якої строго монотонної дійсної функції* $f$ *дійсного аргументу існує* $\varphi$ *— обернена функція, графік якої отримують з графіка* $\{y = f(x)\}$ *симетрією відносно бісектриси кута між осями координат.*

*Якщо неперервна та строго опукла на проміжку функція* $f$ *спадає, то* $\varphi$ *також спадає і має той самий напрям строгої опуклості. Якщо* $f$ *зростає, то* $\varphi$ *зростає та має протилежний напрям стро-*

[1] Крім векторного та мішаного добутку.

*гої опуклості*[1].

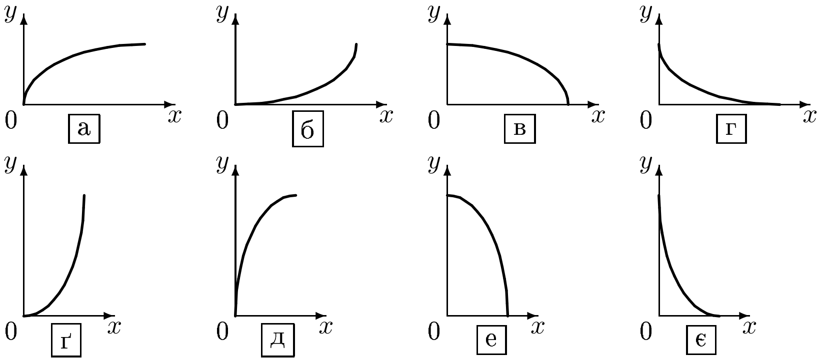



*Рис. 21.* А, б, и, г — графіки опуклих монотонних функцій; ґ, д, е, є — їхні симетричні образи відносно бісектриси кута між осями координат — графіки обернених функцій.

**Доведення** (див. рис. 21 як ілюстрацію). Нагадаємо, що для будь-якої функції $f$ (як відношення) існує обернене відношення $\varphi$. Якщо це обернене відношення — функція, то його називають оберненою функцією. Обернена функція $\varphi$ існує тоді й лише тоді, коли різним значенням аргументу $x$ відповідають різні значення $f(x)$. Остання умова справджується для всіх строго монотонних функцій $f$.

Зауважимо, що перетворення координатної площини $(x;y)\to(y;x)$ — симетрія відносно бісектриси кута між осями координат.

Однаковий характер монотонності $f$ і $\varphi$ випливає із зауваження 22. Справді, припустимо, що

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi(y_1) \\ x_2 = \varphi(y_2) \end{cases}.$$

Якщо $f$ спадає, то маємо: $x_1 < x_2 \ \Leftrightarrow \ (y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2)$.

Якщо $f$ зростає, то маємо: $x_1 < x_2 \ \Leftrightarrow \ (y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2)$.

[1] У розділі “Неперервність функції” подано доведення неперервності функції $\varphi$, оберненої до неперервної $f$, і того, що область значень неперервної на проміжку функції є проміжком (див. теорему про проміжне значення).

З геометричного змісту осьової симетрії на площині випливає, що такою симетрією опукла множина відображається в опуклу, а строго опукла множина — у строго опуклу.

Якщо $f$ неперервна і строго опукла вгору, то строго опукла множина

$$\{(x;y) \in D(f) \times D(\varphi) |\ y \le f(x)\}$$

перетворенням $(x;y) \to (y;x)$ — симетрією відносно бісектриси кута між осями координат — відображається у таку строго опуклу множину:

$$\{(x;y) \in D(\varphi) \times D(f) |\ x \le f(y)\}. \tag{80}$$

Візьмемо значення функції $\varphi$ від правої та лівої частин нерівності $x \le f(y)$ в означенні множини (80):

- якщо $f$ і $\varphi$ спадають, то множина (80) — строго опукла множина $\{(x;y) \in D(\varphi) \times D(f) |\ \varphi(x) \ge y\}$. Звідси випливає строга опуклість функції $\varphi$ вгору;

- якщо $f$ і $\varphi$ зростають, то множина (80) — строго опукла множина $\{(x;y) \in D(\varphi) \times D(f) |\ \varphi(x) \le y\}$. Звідси випливає строга опуклість функції $\varphi$ вниз.

Якщо $f$ неперервна і строго опукла вниз, то строго опукла множина

$$\{(x;y) \in D(f) \times D(\varphi) |\ y \ge f(x)\}$$

перетворенням $(x;y) \to (y;x)$ — симетрією відносно бісектриси кута між осями координат — відображається у таку строго опуклу множину:

$$\{(x;y) \in D(\varphi) \times D(f) |\ x \ge f(y)\}. \tag{81}$$

Візьмемо значення функції $\varphi$ від правої та лівої частин нерівності $x \ge f(y)$ в означенні множини (81):

- якщо $f$ і $\varphi$ спадають, то множина (81) — строго опукла множина $\{(x;y) \in D(\varphi) \times D(f) |\ \varphi(x) \le y\}$. Звідси випливає строга опуклість функції $\varphi$ вниз;

- якщо $f$ і $\varphi$ зростають, то множина (81) — строго опукла множина $\{(x;y) \in D(\varphi) \times D(f) |\ \varphi(x) \ge y\}$. Звідси випливає строга опуклість функції $\varphi$ вгору.

## 7.4. Дослідження функцій

Дослідити функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ означає:

1. Знайти область визначення функції.

2. Вказати проміжки[1] неперервності функції.

3. З'ясувати, чи функція є парною, непарною або ні парною, ні непарною.

4. Встановити, чи функція періодична. Якщо функція періодична, то вказати основний період.

5. Визначити проміжки, на яких функція монотонна, та межі, в яких змінюється значення функції на цих проміжках.

6. Знайти точки екстремумів[2].

7. Вказати область значень функції.

8. Визначити проміжки, на яких функція має постійний напрям опуклості, та точки (*перегину*), в яких змінюється напрям опуклості.

9. Вказати точки перетину графіка з осями координат, у тому числі нулі функції, тобто значення аргументу, в яких функція дорівнює 0.

10. Знайти рівняння асимптот — прямих координатної площини, відстань між якими і точками графіка функції на деякому проміжку прямує до нуля, якщо аргумент на цьому проміжку прямує до певного дійсного значення (вертикальні асимптоти) або до $\pm\infty$ (горизонтальні та похилі асимптоти), якщо вони існують.

---

[1] Лівий (правий) кінець проміжку необхідно *обов'язково* вказувати як його елемент, якщо функція неперервна у точці, що є кінцем проміжку. Аналогічно потрібно робити при знаходженні проміжків монотонності та опуклості.

[2] Якщо область визначення функції — об'єднання проміжків її монотонності, то, щоб уникнути повторень і скоротити опис, не будемо окремо перераховувати точки екстремумів, що у даному разі є точками зміни характеру монотонності.

На підставі проведеного дослідження можна побудувати графік функції, відобразивши всі основні її властивості, навіть якщо ми "від руки" з'єднаємо плавною кривою точки екстремумів і перегину.

При деяких перетвореннях функції її графік зазнає змін, що мають прозору геометричну інтерпретацію. У всіх поданих твердженнях $a \neq 0$ — стала.

1. Графік функції $y = f(x) + a$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням на вектор $\vec{v}(0; a)$.

2. Графік функції $y = f(x + a)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням на вектор $\vec{u}(-a; 0)$.

3. Якщо $a > 0$, то графік функції $y = af(x)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ розтягом вздовж осі ординат у $a$ разів. Якщо $a < 0$, то відповідне перетворення — симетрія відносно осі абсцис з подальшим розтягом вздовж осі ординат у $|a|$ разів.

4. Якщо $a > 0$, то графік функції $y = f(ax)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ розтягом вздовж осі абсцис у $1/a$ разу або стисканням в $a$ разів. Якщо $a < 0$, то відповідне перетворення — симетрія відносно осі ординат з подальшим розтягом у $1/|a|$ разу (стисканням у $|a|$ разів) вздовж осі абсцис.

5. Графік функції $y = |f(x)|$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ для тих значень $x$, для яких $f(x) \geq 0$. Частина графіка для тих $x$, для яких $f(x) < 0$, отримується симетрією відносно осі абсцис відповідної частини графіка $y = f(x)$.

6. Графік функції, оберненої до даної, отримують з графіка даної функції симетрією відносно бісектриси кута між осями координат.

Для побудови графіка достатньо вказати, за допомогою яких геометричних перетворень його можна отримати (паралельним перенесенням, розтягом чи перетворенням симетрії) з відомих графіків.

## 7.5. Степенева функція

**Означення 85.** *Степеневою функцією називають функцію $y = x^n$, де $x$ — дійсний аргумент, $n \neq 0$ — дійсна стала.*

**Теорема 69.** *Степенева функція* $y = x^n$ *на* $(0; +\infty)$ *опукла вниз для цілих* $n$, *відмінних від нуля та одиниці.*

**Доведення.** Доведемо методом математичної індукції, що для натуральних $n > 1$ функція $y = x^n$ на проміжку $[0; +\infty)$ опукла вниз. Нехай надалі $x_1 \neq x_2$ — невід'ємні числа. Тоді матимемо:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} < \frac{2x_1^2 + 2x_2^2}{4} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 > 0.$$

Отже, твердження теореми справджується для $n = 2$. Нехай для певного натурального $n$ і довільних різних дійсних невід'ємних $x_1$, $x_2$ справджується така нерівність:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n < \frac{x_1^n + x_2^n}{2}. \tag{82}$$

Помноживши обидві частини останньої нерівності на $\frac{x_1 + x_2}{2}$, матимемо:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{n+1} < \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_1^n x_2 + x_1 x_2^n}{4} =$$
$$= \frac{2x_1^{n+1} + 2x_2^{n+1} + x_1^n(x_2 - x_1) - x_2^n(x_2 - x_1)}{4} =$$
$$= \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1}}{2} + \frac{(x_1^n - x_2^n)(x_2 - x_1)}{4} < \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1}}{2}.$$

У даному разі здійснено крок індукції.

Нехай надалі $x_1$, $x_2$ — *різні* додатні числа. Тоді отримаємо:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{-1} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1x_2 < (x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < (x_1 - x_2)^2,$$

де остання нерівність справджується. Для довільного натурального $n$ маємо:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{-n} = \left(\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{-1}\right)^n < \left(\frac{x_1^{-1} + x_2^{-1}}{2}\right)^n < \frac{x_1^{-n} + x_2^{-n}}{2},$$

де остання нерівність — наслідок нерівності (82).

**Зауваження 25.** *Те, що степенева функція $y = x^\alpha$ на $(0; +\infty)$ опукла вниз, якщо $\alpha < 0$ або $\alpha > 1$, й опукла вгору, якщо $0 < \alpha < 1$, можна довести, використавши подані далі правило диференціювання степеневої функції і теореми про зв'язок між напрямом опуклості та знаком другої похідної.*

Описуючи властивості степеневої функції для різних значень степеня $n$, пам'ятатимемо (хоча й не записуватимемо), що степенева функція — неперервна на області визначення[1] і неперіодична. Не вказуватимемо напрям опуклості (див. зауваження 25), крім випадків цілого степеня або степеня, оберненого до натурального числа. На всіх поданих графіках масштаб осей абсцис і ординат — один і той самий.

Нехай $n$ — натуральне число. Функція $y = x^n$:

- визначена на $(-\infty; +\infty)$;
- парна для парного $n$, непарна для непарного $n$:

$$(-x)^{2k} = x^{2k}, \qquad (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1};$$

- на $[0; +\infty)$ зростає від 0 до $+\infty$, на $(-\infty; 0]$ для непарного $n$ зростає від $-\infty$ до 0, а для парного $n$ спадає від $+\infty$ до 0;
- найбільшого значення не досягає, а для парного $n$ набуває найменшого значення $y = 0$ для $x = 0$;
- для непарного $n$ змінюється у межах від $-\infty$ до $+\infty$, а для парного $n$ — від 0 до $+\infty$.

[1] Для цілих показників неперервність — наслідок основних теорем про границі послідовностей. Щодо дробових та ірраціональних степенів необхідно розглянути подану нижче теорему про неперервність функції, оберненої до монотонної і неперервної.

Графік функції $y = x$ — пряма, що є бісектрисою кута між осями координат (див. рис. 22).

Для $n > 1$ функція $y = x^n$ на проміжку $[0; +\infty)$ строго опукла вниз. Врахувавши геометричний зміст понять опуклості, парності та непарності функцій, матимемо: на проміжку $(-\infty; 0]$ функція $y = x^n$ для непарних $n > 1$ строго опукла вгору (див. рис. 23), а для парних $n > 1$ — строго опукла вниз (див. рис. 24).

Графік функції $y = x^n$ перетинає осі координат у початку координат $(0; 0)$ і не має асимптот.

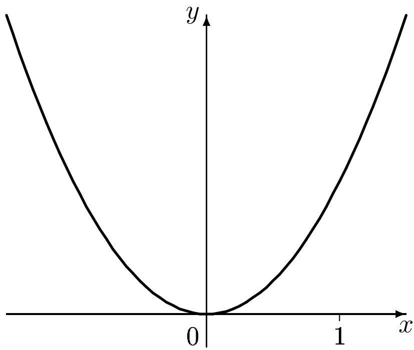



*Рис. 23.* Графік функції $y = x^2$.

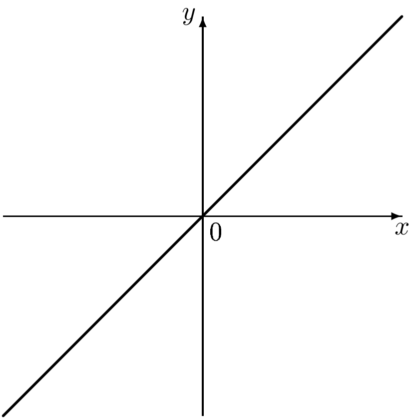



*Рис. 22.* Графік функції $y = x$.

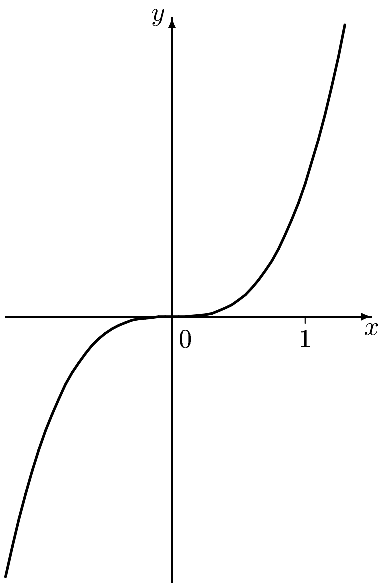



*Рис. 24.* Графік функції $y = x^3$.

Для від'ємного цілого $n$ функція $y = x^n$:

- визначена для всіх дійсних $x$, крім $x = 0$;
- парна для парного $n$, непарна для непарного $n$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad (-x)^{-2k} = x^{-2k},$$

$$(-x)^{-(2k+1)} = -x^{-(2k+1)};$$

- на $(0; +\infty)$ спадає від $+\infty$ до $0$, на $(-\infty; 0)$ для парного $n$ зростає від $0$ до $+\infty$, для непарного $n$ спадає від $0$ до $-\infty$;
- найбільше та найменше значення не досягаються;
- має область значень: для парного $n$ — $(0; +\infty)$, для непарного $n$ —

$$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

- на $(0; +\infty)$ строго опукла вниз, на $(-\infty; 0)$ для непарних $n$ строго опукла вгору, а для парних $n$ строго опукла вниз (див. рис. 25–26).

Графік функції $y = x^n$ у даному разі не перетинає осей координат, що є його асимптотами.

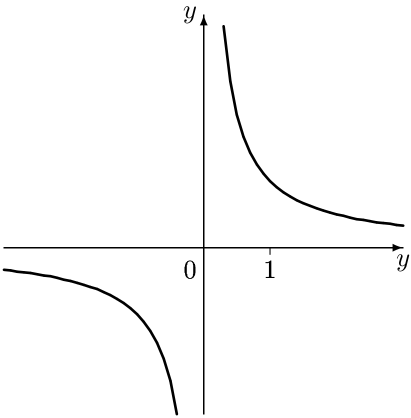



*Рис. 25.* Графік функції $y = 1/x$.

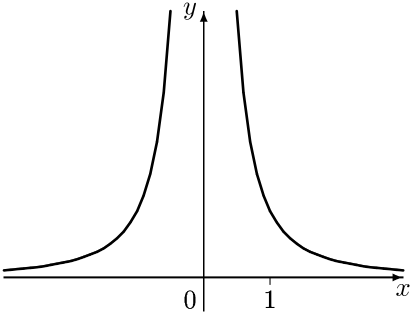



*Рис. 26.* Графік функції $y = 1/x^2$.

Нехай $n$ — раціональне число, обернене до натурального:

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \quad n = \frac{1}{m}.$$

Графік функції $y = x^{1/m}$ для $x \geq 0$ отримують з графіка функції $y = x^m$ симетрією відносно бісектриси кута між осями координат (див. рис. 27–28).

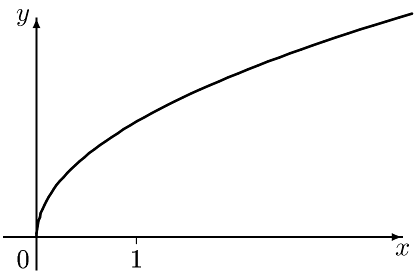



*Рис. 27.* Графік функції $y = x^{1/2}$.

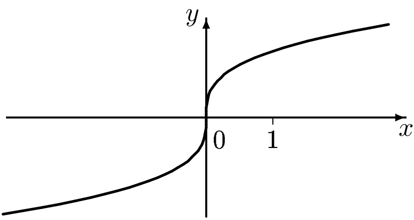



*Рис. 28.* Графік функції $y = x^{1/3}$.

Функція $y = x^{1/m}$:

- для парних $m$ визначена на $[0; +\infty)$, для непарних $m$ — на $(-\infty; +\infty)$;
- непарна для непарного $m$, ні парна, ні непарна для парного $m$;
- для непарного $m$ зростає на області визначення від $-\infty$ до $+\infty$, для парного $m$ — від 0 до $+\infty$;
- найбільшого значення не досягає, для парного $m$ найменше значення $y = 0$ набирає для $x = 0$;
- для непарного $m$ змінюється в межах від $-\infty$ до $+\infty$, для парного $m$ — від 0 до $+\infty$;
- на $[0; +\infty)$ строго опукла вгору, а для непарних $m$ строго опукла вниз на $(-\infty; 0]$.

Графік функції $y = x^{1/m}$ перетинає осі координат у початку координат і не має асимптот.

Нехай тепер $n = p/q$ — *нескоротний* дріб з цілим чисельником $p$ і натуральним знаменником $q > 1$, а функція має такий вигляд:

$$y = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}. \qquad (83)$$

Якщо $p > 0$ — парне, то функція визначена на $(-\infty; +\infty)$, парна, зростає на $[0; +\infty)$ від 0 до $+\infty$, спадає на $(-\infty; 0)$ від $+\infty$ до 0. Графік не має асимптот (див. рис. 29–30).

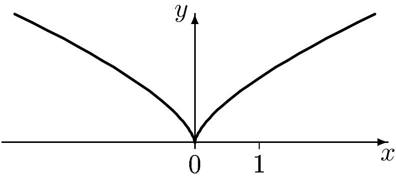



*Рис. 29.* Графік функції $y = x^{2/3}$.

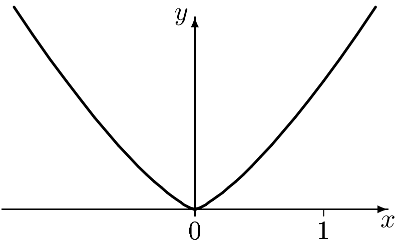



*Рис. 30.* Графік функції $y = x^{4/3}$.

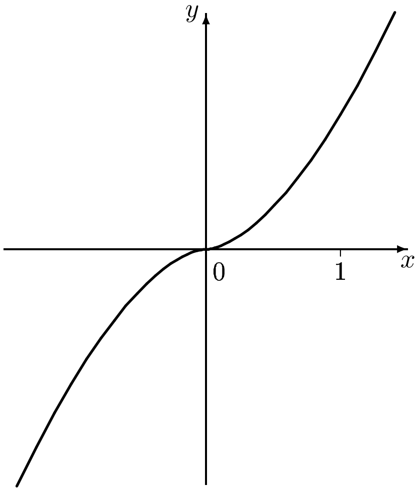



*Рис. 31.* Графік функції $y = x^{5/3}$.

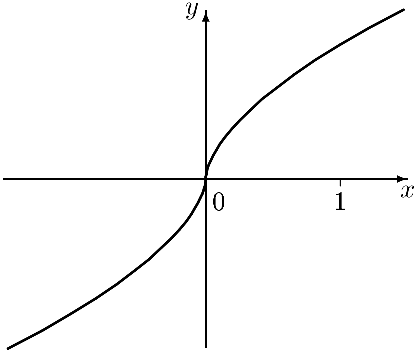



*Рис. 32.* Графік функції $y = x^{3/5}$.

Якщо $p > 0$ та $q$ — непарні, то функція (83), визначена на $\mathbb{R}$, непарна, зростає на $(-\infty; +\infty)$ від $-\infty$ до $+\infty$, змінює напрям строгої опуклості на протилежний у точці $x = 0$. Графік не має асимптот (див. рис. 31–32).

Якщо $p > 0$ — непарне, а $q$ — парне, то функція (83) визначена на $[0; +\infty)$, ні парна, ні непарна[1], зростає на $[0; +\infty)$ від 0 до $+\infty$. Графік не має асимптот (див. рис. 33–34).

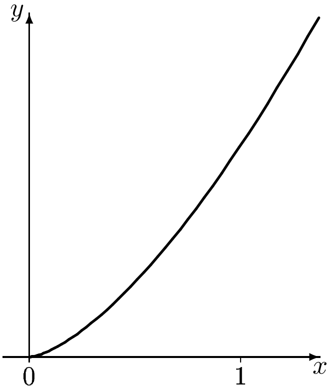



*Рис. 33.* Графік функції $y = x^{3/2}$.

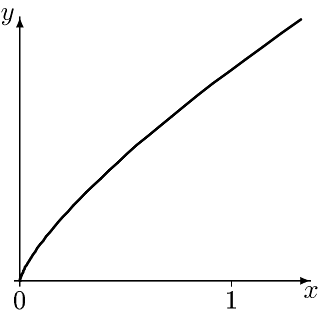



*Рис. 34.* Графік функції $y = x^{3/4}$.

Якщо $p < 0$ — парне, то функція (83) визначена для всіх дійсних $x$, відмінних від 0, парна і зростає на $(-\infty; 0)$ від 0 до $+\infty$, спадає на $(0; +\infty)$ від $+\infty$ до 0. Асимптоти графіка — координатні осі (див. рис. 35).

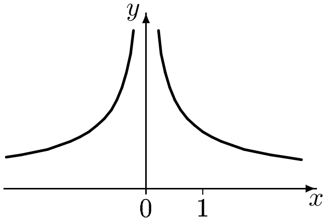



*Рис. 35.* Графік функції $y{=}x^{-2/3}$.

Якщо $p < 0$, $q$ — непарні, то функція (83) визначена для всіх дійсних $x$, відмінних від 0, непарна, спадає на $(-\infty; 0)$ від 0 до $-\infty$, спадає на $(0; +\infty)$ від $+\infty$ до 0. Асимптоти графіка — координатні осі (див. рис. 36).

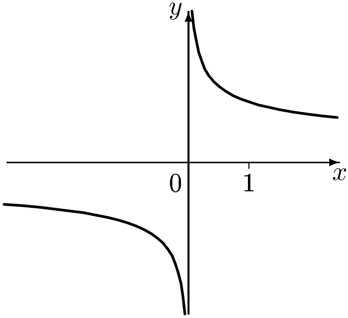



*Рис. 36.* Графік функції $y{=}x^{-1/3}$.

[1] Область визначення не симетрична відносно 0.

Якщо $p < 0$ — непарне, а $q$ — парне, то функція (83) визначена на $(0; +\infty)$, ні парна, ні непарна, спадає на $(0; +\infty)$ від $+\infty$ до 0. Асимптоти графіка — координатні осі (див. рис. 37).

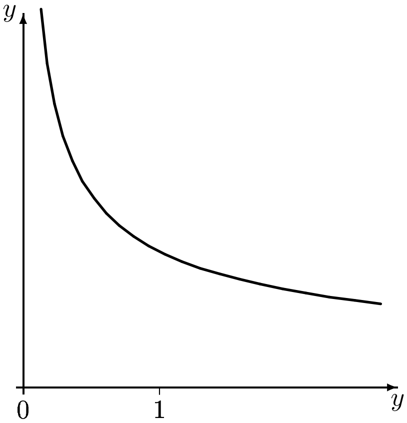



*Рис. 37.* Графік функції $y{=}x^{-1/2}$.

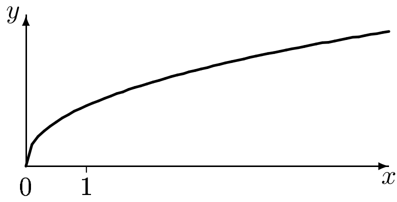



*Рис. 38.* Графік $y = x^{1/\sqrt{5}}$.

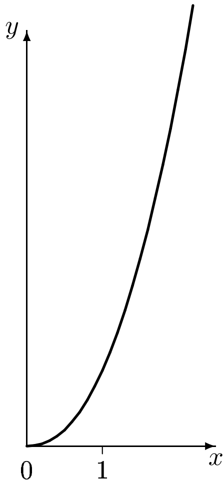



*Рис. 39.* Графік функції $y = x^{\sqrt{5}}$.

Нехай тепер $\alpha$ — ірраціональне число, $x > 0$. Тоді маємо:

$$x^\alpha = \lim_{k\to+\infty} x^{r_k}, \qquad (84)$$

де послідовність раціональних $r_k$ збігається до $\alpha$. Залежно від парності чисельників та знаменників $r_k$ для $x < 0$ дійсні $x^{r_k}$ додатні, від'ємні або не визначені. Таким чином, означення (84) неможливо поширити на від'ємні $x$.

Якщо $\alpha{>}0$, то функція $y = x^\alpha$ визначена на $[0; +\infty)$, де вона зростає від 0 до $+\infty$. Астимптот нема (див. рис. 38–39).

Якщо $\alpha{<}0$, то функція $y = x^\alpha$ визначена на $(0; +\infty)$, де спадає від $+\infty$ до 0. Асимптоти графіка — координатні осі (див. рис. 40).

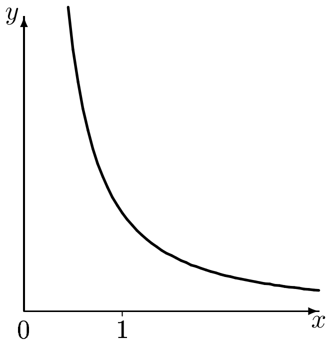



*Рис. 40.* Графік функції $y{=}x^{-\sqrt{2}}$.

## 7.6. Показникова функція

Нехай $0 < a \neq 1$. *Показниковою* функцією називають функцію такого вигляду: $y = a^x$. Вона має такі властивості:

- визначена на $(-\infty; +\infty)$;
- ні парна, ні непарна;
- неперіодична;
- на $(-\infty; +\infty)$ для $a < 1$ спадає від $+\infty$ до 0, для $a > 1$ — зростає від 0 до $+\infty$;
- набирає значень з $(0; +\infty)$;
- строго опукла вгору на області визначення, бо для $x_1 \neq x_2$ маємо:
$$\frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} > \sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} = a^{(x_1+x_2)/2};$$
- не має точок перегину.

Графік функції перетинає вісь ординат у $(0; 1)$ і має горизонтальну асимптоту $\{y = 0\}$ (див. рис. 41–42).

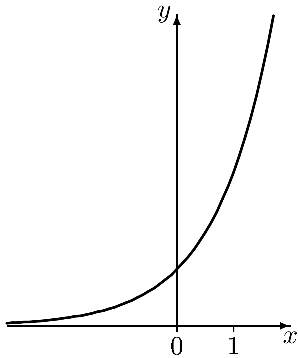



*Рис. 41.* Графік функції $y = e^x$.

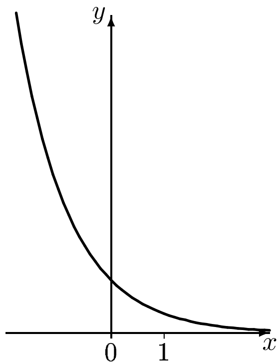



*Рис. 42.* Графік функції $y = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$.

## 7.7. Логарифмічна функція

Нехай $0 < a \neq 1$. *Логарифмічною* функцією називають функцію такого вигляду: $y = \log_a x$. Графік даної функції отримують з графіка $y = a^x$ симетрією відносно бісектриси кута між осями координат. Функція має такі властивості:

- визначена на $(0; +\infty)$;
- ні парна, ні непарна;
- неперіодична;
- на $(0; +\infty)$ для $a < 1$ спадає від $+\infty$ до $-\infty$, для $a > 1$ — зростає від $-\infty$ до $+\infty$;
- $(-\infty; +\infty)$ — область значень;
- строго опукла вниз на області визначення для $a < 1$, строго опукла вгору для $a > 1$;
- не має точок перегину.

Графік функції перетинає вісь абсцис у точці $(1; 0)$ і має вертикальну асимптоту $\{x = 0\}$.

Графіки логарифмічних функцій подано на рис. 43–44.

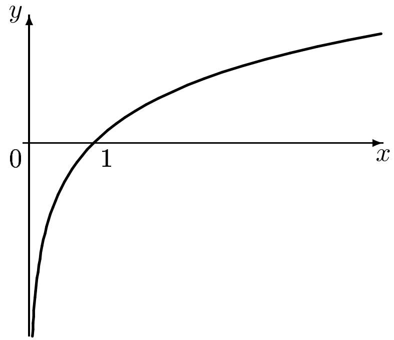



*Рис. 43.* Графік функції $y = \ln x$.

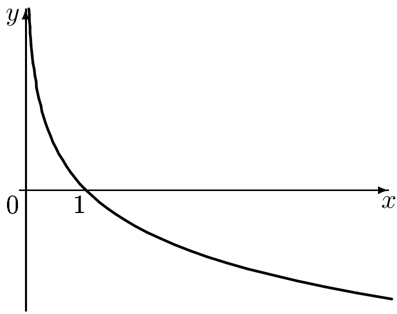



*Рис. 44.* Графік функції $y = \log_{1/e} x$.

## 7.8. Нерівність Коші

**Теорема 70.** *Якщо $f$ визначена і строго опукла вниз на $(a;b)$, то для довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з $(a;b)$ справджується така нерівність:*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}, \tag{85}$$

*що перетворюється на рівність лише за умови $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

**Доведення**. Доведемо спочатку нерівність методом математичної індукції для натуральних $n = 2^k$, де $k = 1, 2, 3, \ldots$ .

Для $k = 1$ маємо: $n = 2$. У даному разі нерівність (85) випливає з означення строгої опуклості.

Припустимо, що нерівність (85) справджується з усіма застереженнями щодо перетворення на рівність для $n = 2^k$ і довільних аргументів з інтервалу опуклості $f$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) \; = \\
= \; & f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}+\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right) \; \leq \\
\leq \; & \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right) \; \leq \\
\leq \; & \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k}+\frac{f(x_{2^k+1})+\cdots+f(x_{2^{k+1}})}{2^k}\right) \; = \\
= \; & \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^k})+f(x_{2^k+1})+\cdots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}},
\end{aligned}$$

де перша нерівність випливає з означення опуклості, друга — з припущення індукції. Перетворення на рівність можливе лише тоді, коли обидві нестрогі нерівності перетворюються на рівності за умови, що всі аргументи збігаються.

Нехай $n$ — довільне натуральне число, що не є натуральним степенем 2; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — довільні дійсні числа з $(a;b)$. Існує $k = [\log_2 n] + 1$ — найменше з натуральних чисел, степінь 2 яких більший, ніж $n$. Виберемо:

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^k} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Тоді матимемо:

$$\begin{aligned}
f(x_{n+1}) &= f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) = \\
&= f\left(\frac{\overbrace{x_{n+1}+\cdots+x_{n+1}}^{n \text{ разів}}+x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right) = \\
&= f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right) \leq \\
&\leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k} = \\
&= \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+(2^k-n)f(x_{n+1})}{2^k}.
\end{aligned}$$

Помноживши перший та останній вирази на $2^k/n$ і звівши подібні доданки, отримаємо таку нерівність:

$$f(x_{n+1}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Як і раніше, нерівність перетворюється на рівність лише для однакових значень аргументів.

**Зауваження 26.** *Аналогічне твердження можна довести для строго опуклої вгору функції, замінивши відношення $\leq$ на $\geq$ у нерівностях. Нерівність (85) справджується і для нестрого опуклих функцій, але хибним у даному разі є застереження щодо перетворення нерівності на рівність.*

**Означення 86.** *Для довільних дійсних $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ означимо середнє арифметичне (значення) як такий вираз:*

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}.$$

*Для додатних $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ означимо середнє геометричне й середнє гармонійне (значення) як відповідно такі вирази:*

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n}, \qquad \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

**Наслідок 16 (нерівність Коші).**[1] *Для довільних додатних* $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ *маємо:*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}.$$

*Отже, середнє геометричне не перевищує середнього арифметичного. Рівність можлива лише за такої умови:* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

**Доведення.** Функція $\ln x$ строго опукла вгору на множині додатних дійсних чисел. Таким чином, маємо:

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n}{n} \le \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} &= e^{(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n)/n} \le \\ &\le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}. \end{aligned}$$

З доведеної нерівності випливає нерівність між середніми геометричним і гармонійним. Таким чином, маємо:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdots \frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Отже, *середнє гармонійне не перевищує середнього геометричного, що водночас не перевищує середнього арифметичного.*

## 7.9. Характеристична властивість показникової функції

**Теорема 71.** *Неперервна функція f, що задана на всій множині дійсних чисел і набирає додатних значень, є показниковою тоді й лише*

[1] Луї Оґюстен Коші (1789–1857) — видатний французький математик, автор фундаментальних понять та результатів у математичному аналізі, теорії аналітичних функцій, геометрії і математичній фізиці.

*тоді, коли значення функції f суми аргументів дорівнює добутку значень функції f кожного доданка:*

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

**Доведення.** Виконання рівності $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ — одна з властивостей дії піднесення додатного числа до дійсного степеня. Доведемо достатність. Означимо неперервну (як суперпозицію неперервних) функцію $g(x) = \ln f(x)$. Тоді величина функції $g$ суми довільних аргументів дорівнює сумі значень функції $g$ кожного доданка:

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2).$$

Отже, $\quad g(0) + g(0) = g(0) \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow g(-x) + g(x) = g(0) = 0.$

Звідси отримаємо: $g(-x) = -g(x)$.

Для довільних натуральних $p$ і $q$ маємо:

$$\overbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}^{q \text{ разів}} = 1 \quad \Rightarrow \quad q \cdot g\left(\frac{1}{q}\right) = g(1) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad g\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} \cdot g(1),$$

$$\overbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}^{p \text{ разів}} = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad p \cdot g\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{p}{q}\right) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot g(1).$$

Виберемо: $a = e^{g(1)}$. Тоді для довільного раціонального $x$ матимемо:

$$g(x) = x \cdot g(1) \ \Leftrightarrow \ f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{g(x)} = e^{xg(1)} = a^x.$$

Функції $f(x)$ і $a^x$ неперервні, тому рівність $f(x) = a^x$ справджується для всіх дійсних $x$.

## 7.10. Тригонометричні функції

**Означення 87.** *На колі з радіусом* $1$ *і центром у початку координат від точки* $A(1;0)$ *відкладемо дугу* $AB$ *довжини* $\varphi > 0$ *за вибраним додатним напрямом вимірювання кутів*[1]. *Якщо* $\varphi < 0$, *то відкладемо дугу довжини* $|\varphi|$ *у протилежному напрямі (див. рис. 45). Будемо вважати, що пряма* $OB$ *утворює кут* $\varphi$ *(радіанів) з віссю абсцис. Нехай точка* $B$ *має координати* $(x;y)$. *Означимо тригонометричні функції: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс дійсного аргументу* $\varphi$:

$$\sin\varphi = y; \qquad \operatorname{tg}\varphi = y/x; \qquad \operatorname{cosec}\varphi = 1/x = 1/\sin\varphi;$$
$$\cos\varphi = x; \qquad \operatorname{ctg}\varphi = x/y; \qquad \sec\varphi = 1/y = 1/\cos\varphi,$$

*якщо існують відповідні відношення.*

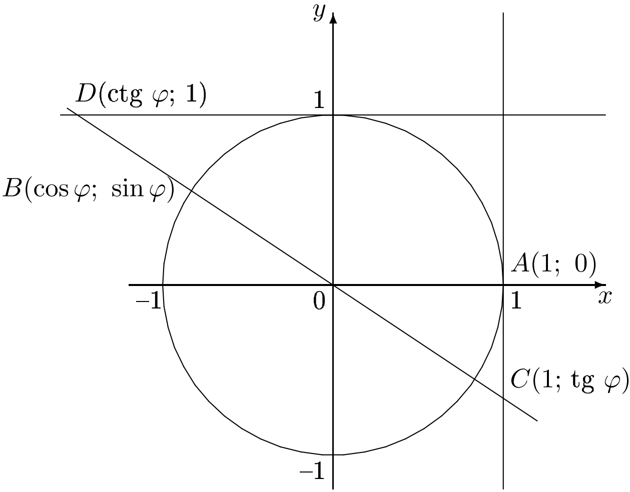



*Рис. 45.* Пряма $OB$, що утворює кут $\varphi$ з віссю абсцис і перетинає коло $\{x^2+y^2=1\}$ у точці $B(\cos\varphi;\ \sin\varphi)$, вісь тангенсів $\{x=1\}$ у точці $C(1;\ \operatorname{tg}\varphi)$, вісь котангенсів $\{y=1\}$ у точці $D(\operatorname{ctg}\varphi;\ 1)$.

[1] Таким чином, щоб кут від додатного напряму осі абсцис до додатного напряму осі ординат дорівнював $\pi/2$.

З означення тригонометричних функцій і теореми Піфагора випливають так звані *основні співвідношення між тригонометричними функціями*[1]:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1; \qquad \frac{1}{\sin^2\varphi} = 1 + \mathrm{ctg}^2\varphi; \qquad \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi;$$

парність функції $\cos\varphi$:

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi;$$

непарність функцій $\sin\varphi$, $\mathrm{ctg}\ \varphi$ і $\mathrm{tg}\ \varphi$:

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi; \qquad \mathrm{tg}\ (-\varphi) = -\mathrm{tg}\ \varphi; \qquad \mathrm{ctg}\ (-\varphi) = -\mathrm{ctg}\ \varphi.$$

## 7.11. Формули зведення

**Означення 88.** *Формули зведення подають тригонометричні функції кутів $\pi\pm\varphi$, $2\pi\pm\varphi$, $\pi/2\pm\varphi$ і $3\pi/2\pm\varphi$ через тригонометричні функції кута $\varphi$ (див. табл. 8 і рис. 46, на якому в кінцях векторів вказано кути, які вони утворюють з віссю абсцис).*

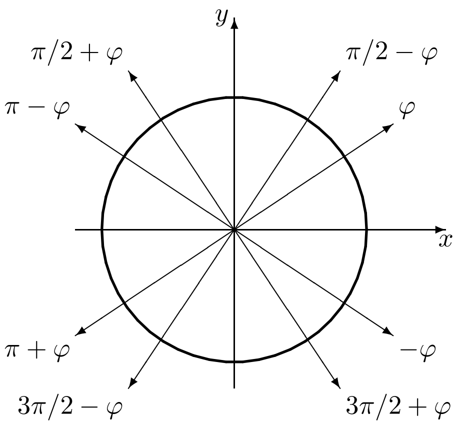



*Рис. 46.* Геометрична ілюстрація до формул зведення.

[1] Там, де ці функції визначені.

*Таблиця 8*

Формули зведення

| $x$ | $\pi \pm \varphi$ | $2\pi \pm \varphi$ | $\pi/2 \pm \varphi$ | $3\pi/2 \pm \varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $\mp \sin \varphi$ | $\pm \sin \varphi$ | $\cos \varphi$ | $-\cos \varphi$ |
| $\cos x$ | $-\cos \varphi$ | $\cos \varphi$ | $\mp \sin \varphi$ | $\pm \sin \varphi$ |
| $\mathrm{tg}\ x$ | $\pm\ \mathrm{tg}\ \varphi$ | $\pm\ \mathrm{tg}\ \varphi$ | $\mp\ \mathrm{ctg}\ \varphi$ | $\mp\ \mathrm{ctg}\ \varphi$ |
| $\mathrm{ctg}\ x$ | $\pm\ \mathrm{ctg}\ \varphi$ | $\pm\ \mathrm{ctg}\ \varphi$ | $\mp\ \mathrm{tg}\ \varphi$ | $\mp\ \mathrm{tg}\ \varphi$ |

## 7.12. Теореми додавання та їхні наслідки

**Теорема 72 (теореми додавання).** *Справджуються такі рівності:*

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;\\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;\\
\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\mathrm{tg}\ \alpha \pm \mathrm{tg}\ \beta}{1 \mp \mathrm{tg}\ \alpha\ \mathrm{tg}\ \beta},
\end{aligned}$$

*де остання рівність розглядається лише для тих аргументів, для яких існують відповідні значення тангенсів.*

**Доведення.** Вектори $\overrightarrow{(\cos\alpha; \sin\alpha)}$, $\overrightarrow{(\cos\beta; \mp\sin\beta)}$ мають довжину 1 і утворюють з віссю абсцис відповідно кути $\alpha$ та $\mp\beta$, тому кут між ними дорівнює $\alpha \pm \beta$. Обчислимо скалярний добуток:

$$\overrightarrow{(\cos\alpha; \sin\alpha)} \cdot \overrightarrow{(\cos\beta; \mp\sin\beta)} = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha \pm \beta).$$

Враховуючи формули зведення, матимемо:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \cos(\pi/2 - (\alpha \pm \beta)) = \cos((\pi/2 - \alpha) \mp \beta) = \\
&= \cos(\pi/2 - \alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\pi/2 - \alpha)\sin\beta = \\
&= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;\\
\mathrm{tg}\ (\alpha \pm \beta) &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} = \\
&= \frac{\mathrm{tg}\ \alpha \pm \mathrm{tg}\ \beta}{1 \mp \mathrm{tg}\ \alpha\ \ \mathrm{tg}\ \beta}.
\end{aligned}$$

**Наслідок 17.** *Справджуються такі рівності:*

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\ \cos\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};\\
\sin\alpha\ \sin\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};\\
\sin\alpha\ \cos\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2};\\
\cos x+\cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\\
\cos x-\cos y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2};\\
\sin x\pm\sin y &= 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}.
\end{aligned}$$

**Доведення.** Для доведення перших трьох тотожностей достатньо перетворити їхні праві частини, використовуючи теореми додавання. Для доведення трьох останніх потрібно подати праві та ліві частини через $\alpha$ та $\beta$, де

$$\left(\alpha=\frac{x+y}{2}\ \wedge\ \beta=\frac{x-y}{2}\right)\ \Leftrightarrow\ (x=\alpha+\beta\ \wedge\ y=\alpha-\beta),$$

і врахувати непарність $\sin x$.

**Наслідок 18 (формули подвоєння аргументу).** *Справджуються такі рівності:*

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha;\\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha;\\
\operatorname{tg}\ 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\ \alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.
\end{aligned}$$

**Наслідок 19 (формули половинного аргументу).** *Справджуються такі рівності:*

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\\
\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\\
\operatorname{tg}\ \frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.
\end{aligned}$$

**Зауваження 27.** *Знак тригонометричної функції половинного аргументу залежить від того, в якій чверті координатної площини лежить промінь, що утворює кут $\alpha/2$ з віссю абсцис. В усякому разі маємо:*

$$\operatorname{sign}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sign}\sin\alpha,$$

*якщо* $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$.

## 7.13. Графіки тригонометричних функцій

Доведемо кілька тверджень, за домогою яких з урахуванням парності (непарністі) й періодичності тригонометричних функцій, формул зведення і співвідношень між тригонометричними функціями, можна встановити поведінку тригонометричних функцій.

**Теорема 73.** *Функція* $y = \sin x$ *неперервна на* $\mathbb{R}$.

**Доведення.** Для довільного $x \in [0; \pi]$:

$\sin x$ — подвоєна площа рівнобедренного трикутника, бічні сторони якого утворюють кут $x$ і мають довжину 1 (якщо $x = 0$ або $x = \pi$, то трикутник вироджується у відрізок);

$x$ — подвоєна площа сектора кола з радіусом 1 і довжиною дуги $x$.

Сектор містить відповідний трикутник, тому, враховуючи непарність функції $\sin x$, маємо: $|\sin x| \leq |x|$ для $|x| \leq \pi$. Якщо ж $|x| > \pi$, то $|x| > \pi > 1 \geq |\sin x|$. Для довільних дійсних $x_1$, $x_2$ отримаємо:

$$\begin{aligned} |\sin x_1 - \sin x_2| &= \left|2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leq \\ &\leq 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \leq |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

тому функція $y = \sin x$ неперервна на $(-\infty; +\infty)$.

**Наслідок 20.** *Тригонометричні функції неперервні на області визначення.*

**Доведення.** Твердження — наслідок доведених теорем про границі, формул зведення і співвідношень між тригонометричними функціями.

**Теорема 74.** *Функція* $\sin x$ *строго опукла вгору на* $[0;\pi]$.

**Доведення.** Для довільних $x, y \in [0;\pi]$ маємо:

$$x \neq y \Rightarrow \frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} < \sin\frac{x+y}{2}.$$

**Теорема 75.** *Функція* $\operatorname{tg}\, x$ *строго опукла вниз на* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

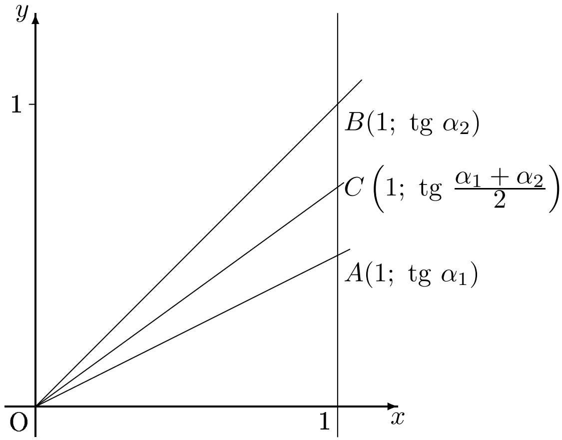



*Рис. 47.* Доведення опуклості $\operatorname{tg}\, x$.

**Доведення.** Нехай $\alpha_1 < \alpha_2$ належать $[0;\frac{\pi}{2})$ — проміжку зростання $\operatorname{tg}\, x$. На координатній площині розглянемо такі точки:

$$A(1;\operatorname{tg}\,\alpha_1),\quad B(1;\operatorname{tg}\,\alpha_2),\quad C\left(1;\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right)$$

(див. рис. 47). В $\triangle ABO$ $OC$ — бісектриса, що ділить $AB$ у відношенні прилеглих сторін. $AC/BC = AO/BO < 1$, тому $C$ лежить нижче середини $AB$, ордината якої — середнє арифметичне ординат точок $A$ і $B$. У результаті отримаємо:

$$\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\,\alpha_1 + \operatorname{tg}\,\alpha_2}{2} > \operatorname{tg}\,\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Дослідимо функцію $y = \sin x$. Область визначення — $\mathbb{R}$. Дана функція непарна. Період функції — $2\pi$. Зростає на $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ від $-1$ до 1, спадає на $[\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3}{2}\pi+2k\pi]$ від 1 до $-1$ (тут і надалі в усіх співвідношеннях цього розділу $k$ — ціле). $[-1; 1]$ — область значень функції. Функція $\sin x$ строго опукла вгору на $[0; \pi]$. Дана функція непарна, тому її графік не змінюється при повороті на $\pi$ навколо початку координат. Отже, функція $y = \sin x$ строго опукла вниз на $[-\pi; 0]$. Враховуючи її періодичність, маємо: функція $y = \sin x$ строго опукла вниз на $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$, строго опукла вгору на $[2k\pi; (2k+1)\pi]$. Точки перегину: $k\pi$. Очевидно, що $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$. Асимптот нема. Графік функції подано на рис. 48.

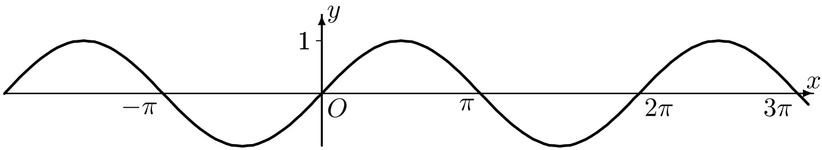



*Рис. 48.* Графік функції $y = \sin x$.

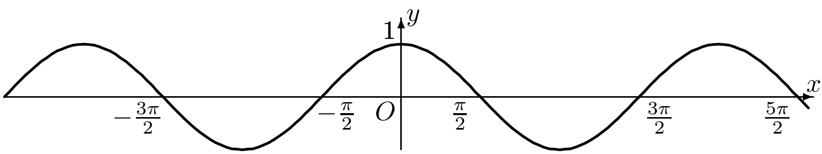



*Рис. 49.* Графік функції $y = \cos x$.

Графік функції $y = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ отримують з графіка функції $y = \sin x$ зсувом на $\frac{\pi}{2}$ у напрямі, протилежному до додатного напряму осі абсцис (див. рис. 49). $\mathbb{R}$ — область визначення. Дана функція парна. Період — $2\pi$. Функція зростає на $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$ від $-1$ до 1, спадає на $[2k\pi; (2k+1)\pi]$ від 1 до $-1$. $[-1; 1]$ — область значень функції. Функція строго опукла вгору на $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, строго опукла вниз на $[\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3}{2}\pi+2k\pi]$. Точки перегину: $\frac{\pi}{2}+k\pi$. Очевидно, що $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\pi/2+k\pi$, $\cos 0=1$. Асимптот нема.

Дослідимо функцію $y=\mathrm{tg}\ x$. Область визначення задається такою нерівністю: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$. Дана функція непарна як відношення непарної до парної ($\mathrm{tg}\ x=\sin x : \cos x$). $\pi$ — її період. Функція зростає на $(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi)$ від $-\infty$ до $+\infty$. $\mathbb{R}$ — область значень. Дана функція опукла вниз на $[0; \frac{\pi}{2})$. Графік функції не змінюється при повороті на $\pi$ навколо початку координат, тому функція $y=\mathrm{tg}\ x$ опукла вгору на $(-\frac{\pi}{2}; 0]$. Період функції — $\pi$, тому вона опукла вниз на $[k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi)$, опукла вгору на $(-\frac{\pi}{2}+k\pi; k\pi]$, $k\pi$ — точки перегину. Очевидно, що $\mathrm{tg}\ x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$. Графік функції має вертикальні асимптоти $\{x=\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ (див. рис. 50).

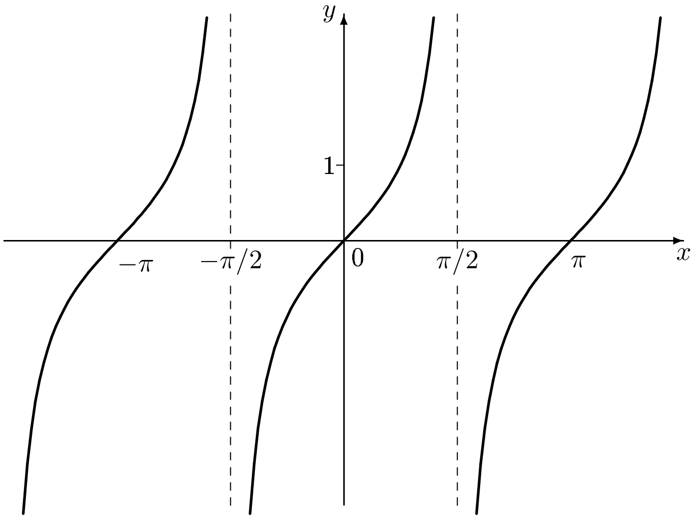



*Рис. 50.* Графік функції $y=\mathrm{tg}\ x$.

Графік функції $y=\mathrm{ctg}\ x=\mathrm{tg}\ (\frac{\pi}{2}-x)=-\mathrm{tg}\ (x-\frac{\pi}{2})$ отримують з графіка $y=\mathrm{tg}\ x$ зсувом на $\frac{\pi}{2}$ у додатному напрямі осі абсцис і подальшою симетрією відносно осі абсцис (див. рис. 51). Область визначення задається такою нерівністю: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$. Функція непарна як відношення парної до непарної: $\mathrm{ctg}\ x=\cos x : \sin x$. Період функції — $\pi$. Спадає на $(k\pi; (k+1)\pi)$ від $+\infty$ до $-\infty$. Область значень — $(-\infty; +\infty)$. Функція опукла вниз на $(k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi]$, опукла вгору на $[\frac{\pi}{2}+k\pi;(k+1)\pi)$. Точки перегину мають такий вигляд: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Очевидно, що $\operatorname{ctg} x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Графік має вертикальні асимптоти $\{x=k\pi\}$.

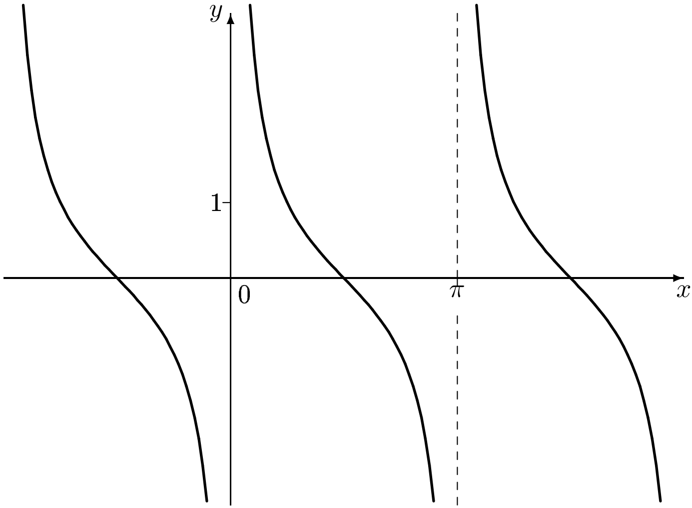



*Рис. 51.* Графік функції $y=\operatorname{ctg} x$.

Неперервна функція $y=\sin x$ зростає на $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ від $-1$ до 1, тому існує функція $\arcsin:[-1;1]\to[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ (арксинус), обернена до $\sin x$:

$$\forall\ x\in[-1;1]\quad \sin(\arcsin x)=x;\qquad \forall\ x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\quad \arcsin(\sin x)=x.$$

Графік $y=\arcsin x$ отримують симетрією відносно бісектриси кута між осями координат частини графіка функції $y=\sin x$, для якої $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ (див. рис. 52).

Дослідимо функцію $y=\arcsin x$. $[-1;1]$ — область визначення. Дана функція неперервна, як і всі обернені тригонометричні функції[1]. Непарна як обернена до непарної, неперіодична. Функція зростає на $[-1;1]$ від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ — область значень функції. Дана

[1] Це можна встановити безпосередньо з означення або на підставі теореми про неперервність функції, оберненої до монотонної і неперервної, яку доведено нижче.

функція опукла вгору на $[-1;0]$, опукла вниз на $[0;1]$, 0 — точка перегину. Очевидно, що $\arcsin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Асимптот нема.

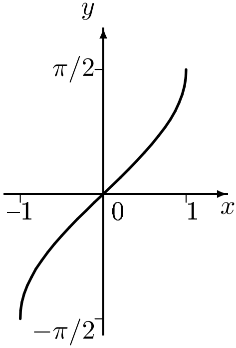



*Рис. 52.* Графік функції $y = \arcsin x$.

Неперервна функція $\cos x$ спадає на $[0;\pi]$ від 1 до –1, тому існує функція $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$ (арккосинус), обернена до $\cos x$:

$$\forall\, x \in [-1;1] \quad \cos(\arccos x) = x; \qquad\qquad \forall\, x \in [0;\pi] \quad \arccos(\cos x) = x.$$

Графік $y = \arccos x$ отримують симетрією відносно бісектриси кута між осями координат частини графіка функції $y = \cos x$, для якої $x \in [0;\pi]$ (див. рис. 53).

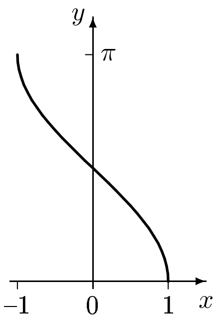



*Рис. 53.* Графік функції $y = \arccos x$.

Дослідимо функцію $y = \arccos x$. $[-1;1]$ — область визначення. Функція ні парна, ні непарна. Справді, для всіх $x \in [-1;1]$ числа

$\arccos x$ і $(\pi - \arccos x)$ належать до $[0;\pi]$, де функція $y=\cos x$ спадає. Таким чином, маємо:

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos\arccos x = -x \;\Rightarrow\; \pi - \arccos x = \arccos(-x).$$

Функція неперіодична і спадає на $[-1;1]$ від $\pi$ до 0. $[0;\pi]$ — область значень функції. Дана функція опукла вниз на $[-1;0]$, опукла вгору на $[0;1]$. 0 — точка перегину. Очевидно, що $\arccos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x=1$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Асимптот нема.

Неперервна функція $\operatorname{tg} x$ зростає на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ від $-\infty$ до $+\infty$, тому існує функція $\operatorname{arctg}: (-\infty;+\infty) \to (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ (арктангенс), обернена до $\operatorname{tg} x$:

$$\forall\, x \in (-\infty;+\infty) \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \qquad \forall\, x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x.$$

Графік $y = \operatorname{arctg} x$ отримують симетрією відносно бісектриси кута між осями координат частини графіка $y=\operatorname{tg} x$, для якої $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ (див. рис. 54).

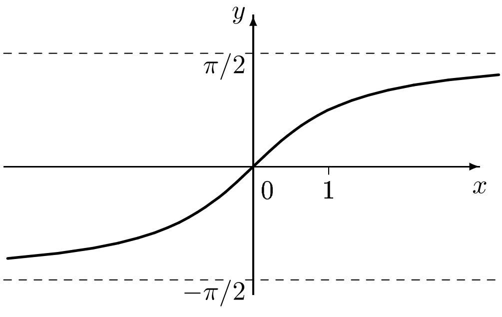



*Рис. 54.* Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Дослідимо функцію $y = \operatorname{arctg} x$. $\mathbb{R}$ — область визначення. Дана функція непарна, неперіодична і зростає на $(-\infty;+\infty)$ від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Область значень функції $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Функція опукла вниз на $(-\infty;0]$, опукла вгору на $[0;+\infty)$. 0 — точка перегину. Очевидно, що

$$\operatorname{arctg} x = 0 \;\Leftrightarrow x = 0.$$

Графік функції має горизонтальні асимптоти $\{y = \pm\frac{\pi}{2}\}$.

Неперервна функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на $(0;\pi)$ від $+\infty$ до $-\infty$, тому існує функція $\operatorname{arcctg} : (-\infty;+\infty) \to (0;\pi)$ (арккотангенс), обернена до ctg:

$$\forall\, x \in (-\infty;+\infty) \;\; \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x; \qquad \forall\, x \in (0;\pi) \;\; \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x.$$

Графік $y = \operatorname{arcctg} x$ отримують симетрією відносно бісектриси кута між осями координат частини графіка $y = \operatorname{ctg} x$, для якої $x \in (0;\pi)$ (див. рис. 55).

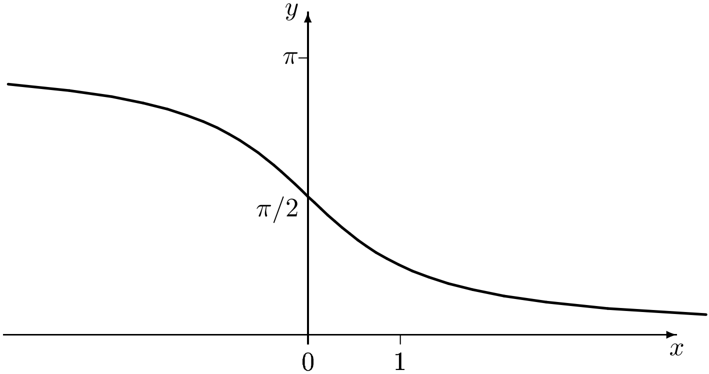



*Рис. 55.* Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$.

Дослідимо функцію $y = \operatorname{arcctg} x$. $\mathbb{R}$ — область визначення. Функція ні парна, ні непарна, бо

$$\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = -x \;\Rightarrow\; \pi - \operatorname{arcctg} \;= \operatorname{arcctg}(-x).$$

Функція неперіодична і спадає на $(-\infty;+\infty)$ від $\pi$ до $0$. $(0;\pi)$ — область значень функції. Опукла вгору на $(-\infty;0]$, опукла вниз на $[0;+\infty)$. $0$ — точка перегину. Очевидно, що $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. Горизонтальні асимптоти — $\{y = 0\}$ і $\{y = \pi\}$.

## 7.14. Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$$\forall\, x \in [-1;1] \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \tag{86}$$

Справді, $0 \leq \arccos x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$, тому маємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Для завершення доведення висловлювання (86) достатньо визначити arcsin від правої та лівої частин останньої рівності.

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{arctg}\ x + \operatorname{arcctg}\ x = \frac{\pi}{2}. \tag{87}$$

Справді, $0 < \operatorname{arcctg}\ x < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\ x < \frac{\pi}{2}$, тому маємо:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\ x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\ x) = x.$$

Для завершення доведення висловлювання (87) достатньо визначити arctg від правої та лівої частин останньої рівності.

$$\forall\ x \in [-1; 1] \quad \sin\arccos x = \cos\arcsin x = \sqrt{1 - x^2}. \tag{88}$$

Висловлювання (88) — наслідок першого з основних співвідношень між тригонометричними функціями:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \arccos x \in [0; \pi] & \Rightarrow & \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}; \\ \alpha = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] & \Rightarrow & \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \end{array}$$

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \sin\operatorname{arctg}\ x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \tag{89}$$

Справді, якщо $\alpha = \operatorname{arctg}\ x$, то $\cos\alpha > 0$, тому знаки $x = \operatorname{tg}\ \alpha$ та $\sin\alpha$ збігаються. Для завершення доведення висловлювання (89) достатньо зауважити, що

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$\forall\ x \in (-1; 1) \quad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{90}$$

$$\forall\ x \neq 0 \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\ x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\ x)} = \frac{1}{x}. \tag{91}$$

Висловлювання (90–91) випливають з тверджень, використаних у доведенні висловлювань (86–89).

## 7.15. Тригонометричні рівняння і нерівності

Для об'єднання всіх множин $A_n$, занумерованих цілими числами $n$, будемо надалі використовувати таке позначення:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n.$$

Для $a \in (-1; 1)$, $b \in (-\infty; +\infty)$ з властивостей прямих та обернених тригонометричних функцій випливають такі еквівалентності:

$$\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{(-1)^n \arcsin a + n\pi\};$$

$$\sin x > a \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\arcsin a + 2n\pi; -\arcsin a + (2n+1)\pi);$$

$$\sin x < a \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (-\arcsin a + (2n+1)\pi; \arcsin a + 2(n+1)\pi);$$

$$\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\pm \arccos a + 2n\pi\};$$

$$\cos x > a \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (-\arccos a + 2n\pi; \arccos a + 2n\pi);$$

$$\cos x < a \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\arccos a + 2n\pi; -\arccos a + 2(n+1)\pi);$$

$$\mathrm{tg}\ x = b \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\mathrm{arctg}\ b + n\pi\};$$

$$\mathrm{tg}\ x > b \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\mathrm{arctg}\ b + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right);$$

$$\mathrm{tg}\ x < b \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; \mathrm{arctg}\ b + n\pi\right);$$

$$\mathrm{ctg}\ x = b \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\mathrm{arcctg}\ b + n\pi\};$$

$$\mathrm{ctg}\ x > b \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n\pi; \mathrm{arcctg}\ b + n\pi);$$

$$\mathrm{ctg}\ x < b \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\mathrm{arcctg}\ b + n\pi; (n+1)\pi).$$

Щоб переконатися у цьому, достатньо нарисувати коло з центром у початку координат з радіусом 1 і вісь тангенсів (котангенсів), а потім провести горизонтальні (вертикальні) прямі, ординати (абсциси) яких дорівнюють $a$ та $b$.

## 7.16. Елементарні функції

**Означення 89.** *Степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні й обернені тригонометричні функції називають основними елементарними функціями.*

*Елементарними функціями вважають функції, які отримують у результаті виконання скінченної кількості арифметичних операцій, взяттям суперпозиції від основних елементарних функцій і функцій — многочленів аргументу.*

**Зауваження 28.** *Основні елементарні функції неперервні на області визначення, тому і всі елементарні функції неперервні на області визначення.*

**Означення 90.** *Означимо такі елементарні функції:*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad -$$

*відповідно гіперболічні синус, косинус, тангенс і котангенс.*

Графіки цих функцій подано на рис. 56–58.

Зміст назв цих функцій стане зрозумілим після ознайомлення з *формулами Ейлера* — співвідношеннями між тригонометричними функціями дійсної змінної і показниковою функцією *комплексної* змінної.

Безпосередньо з означення 90 випливає така рівність:

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1. \tag{92}$$

**Зауваження 29.** *Для довільного дійсного $t$ точка $(\operatorname{ch} t;\ \operatorname{sh} t)$ координатної площини належить до гіперболи $\{x^2 - y^2 = 1\}$.*

Якщо $\varphi$ — кут від додатного напряму осі абсцис до напряму вектора $\vec{v}(\text{ch}\ t;\ \text{sh}\ t)$, то маємо:

$$\text{th}\ t = \text{tg}\ \varphi; \qquad \text{cth}\ t = \text{ctg}\ \varphi.$$

Безпосередньо з означення 90 і рівності (92) випливають такі співвідношення:

$$\text{sh}\ 2x = 2\ \text{sh}\ x\ \text{ch}\ x; \qquad \frac{1}{\text{sh}^2 x} = \text{cth}^2 x - 1;$$

$$\text{ch}\ 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x; \qquad \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x.$$

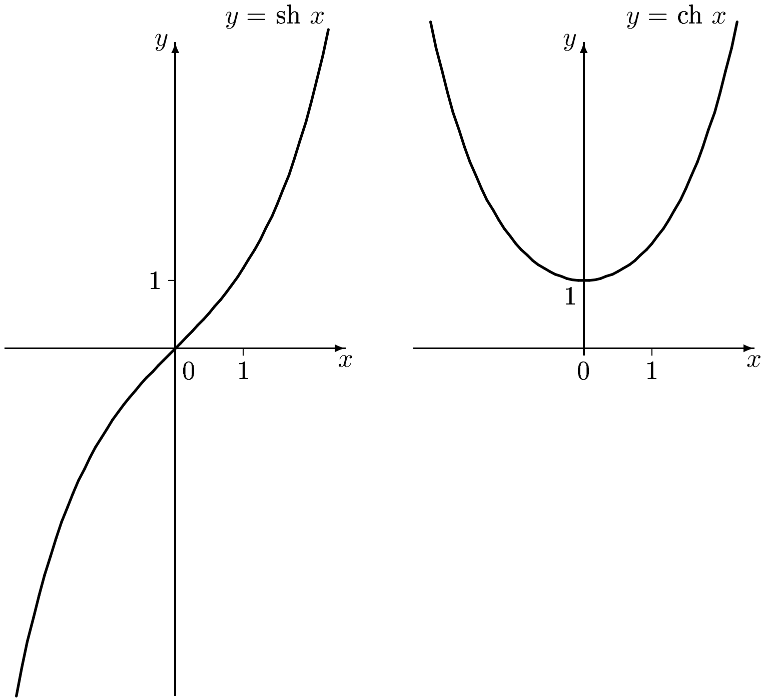



*Рис. 56.* Графіки функцій $y = \text{sh}\ x$ і $y = \text{ch}\ x$ — гіперболічного синуса (ліворуч) і гіперболічного косинуса (праворуч).

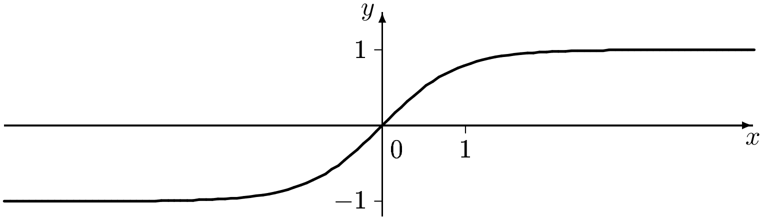



*Рис. 57.* Графік функції $y = \text{th}\ x$ — гіперболічного тангенса.

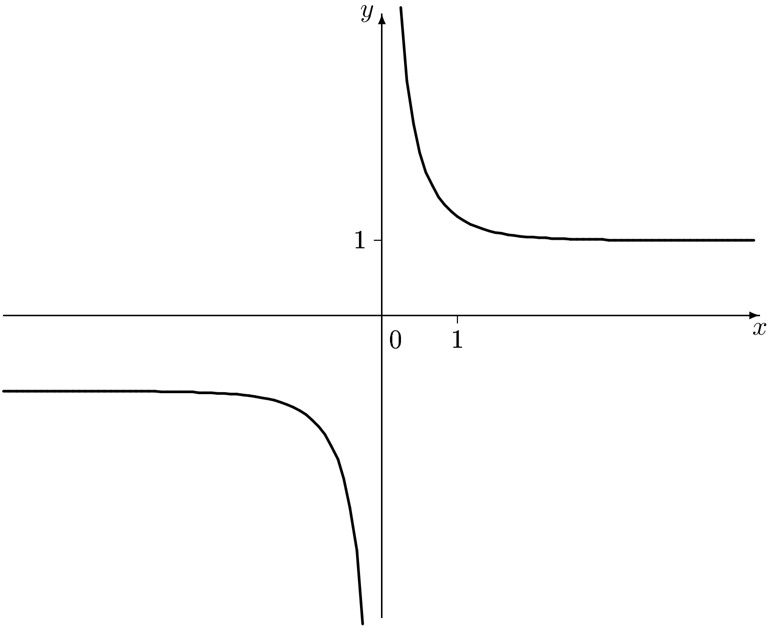



*Рис. 58.* Графік функції $y = \text{cth}\ x$ — гіперболічного котангенса.

# Розділ 8. Рівняння та нерівності

## 8.1. Системи та сукупності

Нагадаємо, що для дійсних $a$ і $b$:

$a > 0$, якщо $a$ — додатне; $a > b$, якщо $a - b > 0$;
$a < 0$, якщо $a$ — від'ємне; $a < b$, якщо $a - b < 0$;
$a \geq 0$, якщо $a$ — невід'ємне; $a \geq b$, якщо $a - b \geq 0$;
$a \leq 0$, якщо $a$ — недодатне; $a \leq b$, якщо $a - b \leq 0$.

Нерівності, у записі яких вжито символи $>$ і $<$, називають строгими, а у записі яких вжито $\geq$ і $\leq$ — нестрогими.

Перерахуємо *властивості нерівностей.*

1. Якщо $a > b > c$, то $a > c$ (транзитивність).
2. Якщо $a \leq b \leq a$, то $a = b$.
3. Нерівності одного змісту можна почленно додавати.
4. Нерівності протилежного змісту можна почленно віднімати.
5. Обидві частини нерівності можна множити на додатне число (при множенні на від'ємне число зміст нерівності змінюється на протилежний).
6. До правої та лівої частин нерівності можна додавати одне й те саме число.

**Означення 91.** *Запровадимо такі поняття:*

*1. Систему співвідношень*

$$f_1(x) < g_1(x) \ \wedge \ f_2(x) < g_2(x) \ \wedge \cdots \wedge \ f_n(x) < g_n(x),$$

*що має еквівалентний запис:*

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases},$$

*де* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... , $g_n(x)$ *— деякі функції аргументу* $x$, *називають системою нерівностей з однією змінною величиною* $x$. *Замість* $<$ *у деяких з нерівностей може бути знак* $\leq$, $\geq$ *чи* $>$. *Якщо використано також знак рівності* $=$, *то матимемо систему рівнянь і нерівностей, якщо використано лише* $=$, *то матимемо систему рівнянь. Система може містити безліч співвідношень. Якщо* $x \in \mathbb{R}$, *то маємо систему співвідношень з однією дійсною змінною, якщо* $x \in \mathbb{R}^2$ *— то з двома, якщо* $x \in \mathbb{R}^k$ *— то з* $k$ *дійсними змінними, які для зручності часто позначають різними літерами, а не однією з різними індексами.*

2. *Значення* $x$, *що задовольняє кожне співвідношення системи, називають розв'язком системи. Якщо множина розв'язків порожня, то систему називають несумісною чи суперечливою. В усіх інших випадках її вважають сумісною чи несуперечливою.*

3. *Сукупність співвідношень*

$$f_1(x) < g_1(x) \ \vee \ f_2(x) < g_2(x) \ \vee \cdots \vee \ f_n(x) < g_n(x),$$

*що має еквівалентний запис:*

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{array}\right. ,$$

*де* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... , $g_n(x)$ *— деякі функції аргументу* $x$, *називають сукупністю нерівностей з однією змінною величиною* $x$. *Замість* $<$ *у деяких з нерівностей може бути знак* $\leq$, $\geq$ *чи* $>$. *Якщо використано і* $=$, *то матимемо сукупність рівнянь та нерівностей, якщо використано лише* $=$, *то матимемо сукупність рівнянь. Сукупність може містити також безліч співвідношень. Якщо* $x \in \mathbb{R}$, *то маємо сукупність співвідношень з однією дійсною змінною, якщо* $x \in \mathbb{R}^2$ *— то з двома, якщо* $x \in \mathbb{R}^k$ *— то з* $k$ *дійсними змінними, які для зручності часто позначають різними літерами, а не однією з різними індексами.*

4. *Значення $x$, що задовольняє хоча б одне співвідношення сукупності, називають розв'язком сукупності.*

5. *Дві системи (сукупності) рівносильні (еквівалентні), якщо вони мають однакові множини розв'язків.*

6. *Якщо хоча б одне співвідношення записаної системи (сукупності) залежить від невідомої сталої, то таку систему (сукупність) називають системою (сукупністю) з параметрами відносно змінної $x$, а невідомі сталі — параметрами системи (сукупності).*

7. *Розв'язати систему (сукупність) без параметрів відносно однієї дійсної змінної означає вказати множину її розв'язків, за можливості подавши її у вигляді об'єднання одноелементних множин і множин-проміжків, що не мають спільних точок. У даному разі об'єднання жодних двох з таких множин не є проміжком.*

8. *Розв'язати систему (сукупність) з параметрами відносно однієї змінної означає:*

   - *подати множину значень параметрів у вигляді об'єднання її підмножин, що не перетинаються;*

   - *для кожної такої підмножини значень параметрів вказати множину розв'язків системи (сукупності), за можливості подавши її у вигляді об'єднання одноелементних множин і множин-проміжків, які не мають спільних точок. У даному разі об'єднання жодних двох з таких множин не є проміжком.*

   *При цьому множина розв'язків системи (сукупності) для різних підмножин значень параметрів по-різному залежить від параметрів.*

## 8.2. Метод інтервалів

*Метод інтервалів — метод розв'язування відносно дійсної змінної $x$ нерівностей такого вигляду*[1]*:*

$$f(x) = f_1^{m_1}(x) \cdot f_2^{m_2}(x) \cdots f_n^{m_n}(x) > 0,$$

*де $m_1$, $m_2$, ... , $m_n$ — цілі, а кожна з функцій $f_j(x)$, $j = 1$, $2$, ... , $n$ при зростанні аргументу змінює знак тільки у скінченній кількості точок.*

Нехай $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_K$ — всі точки числової прямої, в яких хоча б одна з функцій $f_j(x)$ змінює знак.

1. Для певного $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, K$, встановлюємо знак $f(x)$.

2. З'ясовуємо поведінку $\operatorname{sign} f(x)$ на області визначення $f(x)$, враховуючи, що $f(x)$ змінює знак на протилежний у $x_k$ лише тоді, коли сума всіх $m_j$, для яких $f_j(x)$ змінює знак у $x_k$, непарна.

**Задача 8.** *Розв'язати нерівність:*

$$f(x) = (x-1)^1(x+1)^{-1}(x-2)^2(x+2)^{-2} \geq 0.$$

**Розв'язання.** $f(x)$ для достатньо великих $x$ додатне і змінює знак на протилежний лише у точках $\pm 1$ (див. рис. 59, на якому стрілками вказано, що у відповідних точках функція не визначена).

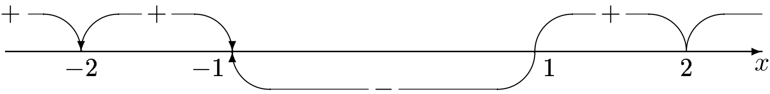



*Рис. 59.* Поведінка $\operatorname{sign}\big((x-1)^1(x+1)^{-1}(x-2)^2(x+2)^{-2}\big)$.

**Відповідь** можна подати у такому вигляді:
або $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup [1; +\infty)$,
або $x < -2 \ \vee \ -2 < x < -1 \ \vee \ 1 \leq x$,
або $\left[\begin{array}{c} x < -2 \\ -2 < x < -1 \\ 1 \leq x \end{array}\right.$.

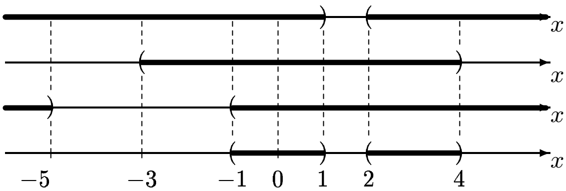
[1]Замість $>$ у нерівності може стояти $\geq$, $\leq$ чи $<$.

На рис. 60 подано приклад розв'язання системи нерівностей за допомогою зображення на окремих рисунках множин розв'язків кожної з нерівностей і всієї системи.

$(x-1)(x-2) > 0$

$(x+3)(x-4) < 0$

$(x+5)(x+1) > 0$




$$\begin{cases} (x+5)(x+1) > 0 \\ (x+3)(x-4) < 0 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[ \begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ \;\;2 < x < 4 \end{array} \right. .$$

*Рис. 60.* Розв'язування системи нерівностей за допомогою графічних ілюстрацій.

## 8.3. Дійсні корені квадратного тричлена

**Означення 92.** *Квадратним тричленом дійсної змінної $x$ називають арифметичний вираз такого вигляду:*

$$ax^2 + bx + c, \tag{93}$$

*де $a \neq 0$, $b$ і $c$ — дійсні сталі. Рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ вважають квадратним, якщо $a \neq 0$.*

Для $a \neq 0$ маємо:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Графік функції $y(x) = ax^2 + bx + c$ отримують з графіка функції $y = x^2$ такою послідовістю перетворень:

- паралельним перенесенням на вектор $\vec{v}(-b/2a; 0)$;
- розтягом вздовж осі ординат в $a$ разів, якщо $a > 0$, або симетрією відносно осі абсцис з подальшим розтягом вздовж осі ординат у $|a|$ разів, якщо $a < 0$;
- паралельним перенесенням на вектор $\vec{u}(0; c - b^2/4a)$.

Найменше значення функції для $a > 0$ і найбільше значення функції для $a < 0$ дорівнює:

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

**Означення 93.** *Запровадимо такі поняття:*
$D = b^2 - 4ac$ — *дискримінант квадратного тричлена (93);*
$x_0$ — *корінь квадратного тричлена (93), якщо* $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. *При цьому* $x_0$ *називають також коренем квадратного рівняння*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Якщо $D < 0$, то квадратне рівняння дійсних коренів не має, і справджується така рівність: $\operatorname{sign}(ax^2 + bx + c) = \operatorname{sign} a$.

Якщо $D > 0$, то маємо:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де корені квадратного тричлена (93) мають такий вигляд:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$, то маємо: $x_1 = x_2 = -b/2a$.

**Означення 94.** *Біквадратним рівнянням називають рівняння такого вигляду:* $ax^4 + bx^2 + c = 0$, *де* $a \neq 0$, $b$ *і* $c$ — *сталі.*

Квадрати коренів біквадратного рівняння — корені відповідного квадратного рівняння.

**Означення 95.** *Зведеним квадратним рівнянням називають рівняння такого вигляду:*

$$x^2 + px + q = 0, \tag{94}$$

*де $p$, $q$ — сталі.*

## 8.4. Теорема Вієта і її наслідки

**Теорема 76 (Вієт).**[1] *Якщо $x_1$, $x_2$ — корені зведеного квадратного рівняння (94), то маємо: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.*

**Доведення**. Твердження випливає з такого подання:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

**Наслідок 21.** *Величина $x^2 + px + q$:*

- *додатна, якщо тричлен не має дійсних коренів або значення аргументу $x$ більше, ніж більший корінь, чи менше, ніж менший корінь цього тричлена;*
- *від'ємна, якщо тричлен має дійсні корені, а значення аргументу $x$ лежить в інтервалі між ними.*

**Наслідок 22.** *Залежність від $p$ і $q$ розташування коренів тричлена $x^2 + px + q$ відносно нуля за умови існування коренів $p^2 - 4q > 0$ така (див. рис. 61):*

- *якщо $q > 0$, то корені мають один знак, що протилежний до знака $p$;*
- *якщо $q < 0$, то корені мають протилежні знаки, а знаки $p$ і меншого за модулем кореня збігаються;*
- *якщо $q = 0$, то коренями є $0$ і $-p$.*

---

[1] Франсуа Віє́т (1540–1603) — французький математик, відомий своїми працями в галузі алгебри і тригонометрії.

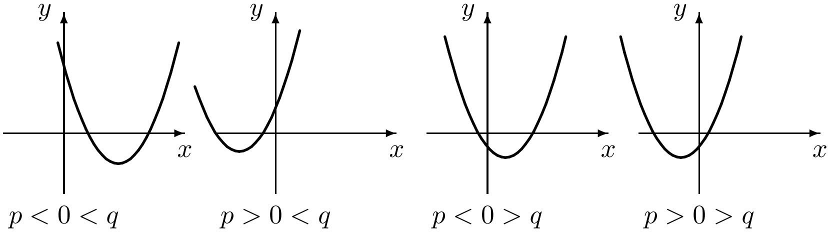



*Рис. 61.* Розташування графіка функції $y = x^2 + px + q$ залежно від знаків $p$ та $q$.

**Наслідок 23.** *Корені тричлена $x^2+px+q$ одночасно більші чи менші, ніж стала $x_0$, тоді й лише тоді, коли корені многочлена*

$$(x + x_0)^2 + p(x_0 + x) + q = x^2 + (p + 2x_0)x + x_0^2 + px_0 + q$$

*одночасно більші (менші), ніж нуль, тобто відповідно коли справджується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < x_0^2 + px_0 + q \\ 0 > p + 2x_0 \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} 0 < x_0^2 + px_0 + q \\ 0 < p + 2x_0 \end{cases}.$$

**Зауваження 30.** *Перша нерівність в отриманих системах — умова того, що $x_0$ не належить до відрізка, обмеженого коренями тричлена $x^2 + px + q$.*

*Друга нерівність — умова того, що $x_0$ відповідно менше чи більше, ніж $-p/2$, що знаходиться між коренями тричлена.*

**Наслідок 24.** *Між двома дійсними коренями квадратного тричлена $ax^2+bx+c$ розташовано один з двох дійсних коренів квадратного тричлена $fx^2+gx+h$ тоді й лише тоді, коли справджується така система нерівностей:*

$$\begin{cases} a \neq 0 \ \wedge \ f \neq 0 \ \wedge \ b^2 - 4ac > 0 \ \wedge \ g^2 - 4fh > 0 \\ a^2h^2 + c^2f^2 + acg^2 + b^2fh - abgh - bcfg - 2acfh < 0 \end{cases}. \tag{95}$$

**Доведення.** Справдження перших двох нерівностей системи вказує на те, що тричлени квадратні, двох наступних — що тричлени мають по два різних дійсних корені.

Позначимо корені квадратного тричлена $ax^2+bx+c$ через $x_1$ і $x_2$. За умови справдження перших 4-ох нерівностей системи (95) між $x_1$ і $x_2$ розташовано один з двох різних дійсних коренів квадратного тричлена $fx^2+gx+h$ тоді й лише тоді, коли $(fx_1^2+gx_1+h)$ і $(fx_2^2+gx_2+h)$ мають протилежні знаки, тобто коли:

$$a^2(fx_1^2+gx_1+h)(fx_2^2+gx_2+h)<0.$$

Останню нерівність системи (95) отримаємо, скориставшись рівностями $x_1+x_2=-b/a$, $x_1x_2=c/a$ (див. теорему Вієта).

З розкладу квадратного тричлена на лінійні множники (за умови існування коренів) випливає подане нижче твердження.

**Зауваження 31.** *Позначимо через $x_1$, $x_2$ корені квадратного тричлена $ax^2+bx+c$, через $y_1$, $y_2$ — корені квадратного тричлена $fx^2+gx+h$. Тоді ліва частина останньої нерівності системи (95) дорівнює добутку:*

$$a^2f^2(x_1-y_1)(x_1-y_2)(x_2-y_1)(x_2-y_2)=f^2(ay_1^2+by_1+c)(ay_2^2+by_2+c).$$

**Задача 9.** *Визначити, для яких дійсних $d$ між дійсними коренями квадратного тричлена $(d-1)x^2+dx+d+1$ розташовано лише один з двох дійсних коренів квадратного тричлена $(d^2+1)x^2+dx+d^2-1$.*

**Розв'язання.** Знайдемо дискримінанти квадратних тричленів:

$$\begin{aligned} d^2-4(d-1)(d+1) &= 4-3d^2,\\ d^2-4(d^2+1)(d^2-1) &= 4+d^2-4d^4. \end{aligned}$$

Ліва частина останньої нерівності аналога системи (95) дорівнює $d^6-2d^5+5d^4+d^3$. Згідно з доведеним наслідком теореми Вієта, шукана множина розв'язків задається таким аналогом системи (95):

$$\begin{cases} d\neq 1 \;\wedge\; d^2+1\neq 0 \;\wedge\; 4-3d^2>0 \;\wedge\; 4+d^2-4d^4>0\\ d^3(d+1)(d^2-3d+8)<0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$d\neq 1 \;\wedge\; d^2<4/3 \;\wedge\; \frac{1-\sqrt{65}}{8}<d^2<\frac{1+\sqrt{65}}{8} \;\wedge\; -1<d<0.$$

**Відповідь.** $d\in(-1;0)$.

## 8.5. Нерівність Коші — Буняковського

**Теорема 77.** *Для довільних послідовностей дійсних чисел* $\{a_j\}_{j=1}^n$ *і* $\{b_j\}_{j=1}^n$ *справджується така нерівність:*

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right).$$

**Доведення.** Розглянемо многочлен змінної $x$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n (a_j x + b_j)^2 &= \sum_{j=1}^n (a_j^2 x^2 + 2a_j b_j x + b_j^2) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right) x^2 + 2x \sum_{j=1}^n a_j b_j + \sum_{j=1}^n b_j^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Якщо

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0,$$

то маємо:

$$4\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 - 4\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right).$$

Нерівність перетворюється на рівність лише тоді, коли існує таке $x$, при якому:

$$a_j x + b_j = 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad \sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0,$$

або ж $a_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, тобто коли члени послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ пропорційні.

## 8.6. Аналітичні методи розв'язування

Першим кроком у розв'язуванні системи є опис області визначення (ОВ) — множини всіх значень аргументу, для яких визначені ліві та праві частини співвідношень системи. Співвідношення, які визначають ОВ, потрібно дописати до системи й отримати еквівалентну систему. Наприклад:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) & \geq & 0 \\ f(x) & = & g^2(x) \end{array} \right. .$$

Якщо область визначення — множина всіх дійсних чисел, то це не обов'язково записувати.

Наступний крок — еквівалентні перетворення з метою подання множини розв'язків у вигляді об'єднання одноелементних множин і проміжків (для систем з однією дійсною змінною) чи їхніх декартових добутків (для систем з багатьма дійсними змінними). Альтернативою до еквівалентних перетворень є побудова послідовності наслідків, у якій множина розв'язків кожної наступної системи містить множину розв'язків попередньої. Такий підхід потребує перевірки для кожного розв'язку *останньої* системи, чи є він розв'язком *початкової* системи.

Розглянемо еквівалентні перетворення системи двох рівнянь, які можна узагальнити на більшу кількість рівнянь системи.

Рівняння такої системи можна переставляти місцями:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} g(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{array} \right. .$$

Одне з рівнянь такої системи можна множити на число, відмінне від нуля:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{r} af(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array} \right. , \qquad \text{де} \;\; a \neq 0.$$

До одного з рівнянь такої системи можна додавати інше:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{r} f(x) = 0 \\ g(x) + f(x) = 0 \end{array} \right. .$$

Така система сукупностей еквівалентна сукупності систем:

$$\left\{\begin{array}{r} f(x)=0 \\ g(x)h(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x)=0 \\ \left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ h(x)=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)=0 \\ h(x)=0 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Інколи буває доцільно зробити заміну змінних для стислого запису рівнянь системи, новий вигляд яких прямо вкаже на шлях подальшого розв'язування: аналогічно до заміни $y = x^2$ для біквадратного рівняння. Бажано, щоб "старі" змінні отримувалися через "нові" за допомогою елементарних функцій. Саме таким чином розв'язують системи показникових, логарифмічних і тригонометричних співвідношень — шляхом зведення до систем співвідношень між арифметичними виразами невідомої змінної, теоретичним розглядом яких ми обмежимося. Не будемо розв'язувати кожну систему чи рівняння до кінця, а лише вкажемо шлях зведення до вже розглянутих рівнянь та систем.

Кожен розв'язок системи

$$\left\{\begin{array}{r} x+y=p \\ xy=q \end{array}\right. \quad — \tag{96}$$

пара розв'язків такого рівняння:

$$(t-x)(t-y) = t^2 - pt + q = 0.$$

Кожен розв'язок системи

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=a \\ xy+yz+zt=b \\ xyz=c \end{array}\right. \quad — \tag{97}$$

трійка розв'язків такого рівняння:[1]

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - at^2 + bt - c = 0.$$

[1] У курсі вищої алгебри вивчають методи розв'язування рівнянь 3-го та 4-го степенів у радикалах, коли корінь многочлена можна отримати з коефіцієнтів многочлена за допомогою скінченної кількості арифметичних дій і добування кореня натурального степеня. Тут ці методи не розглядатимемо, а для розв'язування рівнянь з цілими коефіцієнтами використовуватимемо описану вже методику пошуку раціональних коренів.

**Означення 96.** *Систему співвідношень називають симетричною, якщо у кожному зі співвідношень значення правої та лівої частин не змінюються, коли поміняти між собою значення довільних двох невідомих.*

Симетричні системи рівнянь двох і трьох змінних розв'язують зведенням до розглянутих вже симетричних систем (96) і (97).

**Означення 97.** *Однорідною системою двох рівнянь 2-го степеня з двома невідомими $x$ та $y$ називають систему такого вигляду:*

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases},$$

*де* $|a_1| + |b_1| + |c_1| \neq 0 \neq |a_2| + |b_2| + |c_2|$.

Якщо $d_1 = 0$, то пара (0;0) належить до множини розв'язків першого рівняння. Ліву частину цього рівняння можна подати у вигляді добутку двох лінійних відносно $x$ і $y$ виразів, розклавши на множники квадратні тричлени (відносно $x/y$ або $y/x$):

$$\begin{aligned} a_1\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b_1\frac{x}{y} + c_1, &\quad \text{якщо} \quad a_1 \neq 0; \\ c_1\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b_1\frac{y}{x} + a_1, &\quad \text{якщо} \quad c_1 \neq 0; \\ b_1xy, &\quad \text{якщо} \quad a_1 = c_1 = 0. \end{aligned}$$

Виразивши одну невідому через іншу й підставивши її значення в друге рівняння, отримаємо квадратне рівняння відносно однієї змінної. Випадок $d_1 \neq 0$ зводиться до розглянутого, якщо $d_2 = 0$, або додаванням до обох частин першого рівняння відповідних частин другого рівняння, помножених на $-d_1/d_2$, якщо $d_2 \neq 0$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2y^2 = b^2 \\ \operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(b) \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = b^2 - a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= a \\ x+y &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y) &= a \\ x+y &= b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(x-y) &= a \\ x+y &= b \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

$$\begin{cases} x+y &= a \\ y+z &= b \\ z+x &= c \end{cases} \Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{2},$$

від чого віднімаємо ліві та праві частини рівнянь системи.

$$\begin{cases} xy &= a \\ yz &= b \\ zx &= c \end{cases} \Rightarrow x^2y^2z^2=abc \quad —$$

і по черзі ділимо на ліві та праві частини рівнянь системи, піднесені до квадрата, якщо вони відмінні від 0.

Якщо $a+b=c+d$, то в рівнянні $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=l$ достатньо зробити заміну $t=x^2+(a+b)x$, щоб отримати:

$$(t+ab)(t+cd)=l.$$

Якщо $ab=cd$, $abcd\neq 0$, то в рівнянні

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=lx^2$$

достатньо поділити обидві частини на $x^2$ і зробити таку заміну: $t=x+ab/x$, щоб отримати: $(t+a+b)(t+c+d)=l$.

Якщо $a\neq 0$, то рівняння $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ еквівалентне такому рівнянню:

$$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c-2a=0.$$

$$ax^3+bx^2+bx+a=0 \Leftrightarrow (x+1)(a(x^2-x+1)+bx)=0.$$

Якщо $abd \neq 0$, то рівняння $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ad^2/b^2 = 0$ еквівалентне такому рівнянню:

$$a\left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c - \frac{2ad}{b} = 0.$$

При розв'язуванні рівняння

$$a\frac{f(x)}{g(x)} + b\frac{g(x)}{f(x)} = c$$

спочатку потрібно здійснити заміну $t = f(x)/g(x)$, щоб отримати квадратне рівняння відносно $t$.

Щоб знайти відмінні від нуля корені рівняння

$$\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + mx + q} = c,$$

потрібно чисельники і знаменники дробів поділити на $x$ і здійснити заміну $t = px + q/x$.

Рівняння $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ і $(x+a)^5 - (x+b)^5 = c$ еквівалентні біквадратним рівнянням відносно $t = x + (a+b)/2$.

Якщо

$$\frac{f}{a} = \frac{d^2}{b^2},$$

то, поділивши на $x^2$ обидві частини рівняння

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0,$$

отримаємо:

$$a\underbrace{\left(x^2 + \frac{f}{ax^2}\right)}_{t^2 - 2d/b} + b\underbrace{\left(x + \frac{d}{bx}\right)}_{t} + c = 0.$$

Якщо

$$\frac{a^2}{h^2} = \frac{b^3}{g^3} = \frac{c^6}{f^6},$$

то, поділивши на $x^3$ обидві частини рівняння

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + fx^2 + gx + h = 0,$$

отримаємо:

$$h\left(\frac{a}{h}\ x^3+\frac{1}{x^3}\right)+g\left(\frac{b}{g}\ x^2+\frac{1}{x^2}\right)+f\left(\frac{c}{f}x+\frac{1}{x}\right)+d=0,$$

тобто матимемо:

$$h\underbrace{\left(\frac{c^3}{f^3}x^3+\frac{1}{x^3}\right)}_{t^3-3ct/f}+g\underbrace{\left(\frac{c^2}{f^2}x^2+\frac{1}{x^2}\right)}_{t^2-2c/f}+f\underbrace{\left(\frac{c}{f}x+\frac{1}{x}\right)}_{t}+d=0.$$

$$af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{r}\left\{\begin{array}{r}af^2(x)=0\\ g(x)=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{r}g(x)\neq 0\\ f(x)/g(x)=t\\ at^2+bt+c=0\end{array}\right.\end{array}\right..$$

Інколи використовують такі перетворення:

$$x^4+2ax^3+(a^2+b)x^2+abx+c=(x^2+ax)^2+b(x^2+ax)+c,$$

$$x^4+2ax^3+(a-1)x^2-2bx-b^2=(x^2+ax)^2-(x+b)^2.$$

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{1}{(x+a)^2}+\dfrac{1}{(x+a+1)^2} & = & b\\ & \Updownarrow & \\ \underbrace{\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+a+1}\right)^2}_{t^2} & = & b-2\underbrace{\dfrac{1}{(x+a)(x+a+1)}}_{t}.\end{array}$$

$$x^2+\frac{a^2x^2}{(a+x)^2}=b\ \Leftrightarrow\ \underbrace{\left(x-\frac{ax}{a+x}\right)^2}_{t^2}=b-2a\underbrace{\frac{x^2}{a+x}}_{t}.$$

Рівняння можна спочатку “розв’язувати відносно параметрів”:

$$x^3+2ax^2+a^2x+a-1=a^2x+a(2x^2+1)+x^3-1=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{rcl} ax & = & -x^2-x-1 \\ a & = & -x+1 \end{array}\right.,$$

а потім шукати розв'язки (квадратних) рівнянь відносно змінної $x$ отриманої сукупності.

Зробивши у рівнянні $\sqrt{x^2+a} \pm \sqrt{x^2+b} = c$ заміну:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2+a} \geq 0 \\ v = \sqrt{x^2+b} \geq 0 \end{cases},$$

отримаємо:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u \pm v & = & c \\ u^2 - v^2 & = & a-b \end{array}\right. .$$

Зробивши заміну $u = \sqrt[n]{x+a}$, $v = \sqrt[n]{x+b}$ у рівнянні

$$\sqrt[n]{x+a} \pm \sqrt[n]{x+b} = c,$$

отримаємо таку систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u \pm v & = & c \\ u^n - v^n & = & a-b \end{array}\right. .$$

Будь-яке рівняння можна поєднати у систему з тотожністю. Наприклад, якщо $d \neq 0$, то маємо:

$$\sqrt{ax^2+mx+c} + \sqrt{ax^2+nx+c} = d$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{ax^2+mx+c} + \sqrt{ax^2+nx+c} & = & d \\ ax^2+mx+c-(ax^2+nx+c) & = & (m-n)x \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{ax^2+mx+c} + \sqrt{ax^2+nx+c} & = & d \\ d\left(\sqrt{ax^2+mx+c} - \sqrt{ax^2+nx+c}\right) & = & (m-n)x \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2+mx+c} = \frac{1}{2}\left(d + \frac{m-n}{d}x\right) \\ \sqrt{ax^2+nx+c} = \frac{1}{2}\left(d - \frac{m-n}{d}x\right) \end{cases}.$$

Якщо $f(x) = f(a)$, де $f$ — строго монотонна, то $x = a$.

## 8.7. Використання графіків

**Задача 10.** *Розв'язати відносно $x$ рівняння* $|x-a|+|x-b|=c$.

**Розв'язання.** Нехай $a' = \min(a,b)$, $b' = \max(a,b)$ — найменше та найбільше відповідно з чисел $a$ та $b$. Ліва частина рівняння — сума відстаней від $x$ до $a$ та $b$ ($a'$ і $b'$) — дорівнює:

- $b'-a'+2(a'-x) = a'+b'-2x = a+b-2x$, якщо $x < a'$;
- $b'-a'$, якщо $a' \le x \le b'$;
- $b'-a'+2(x-b') = 2x-a'-b' = 2x-a-b$, якщо $b' < x$.

Таким чином, графік функції $y=|x-a|+|x-b|$ складається з горизонтального відрізка і двох променів, кутові коефіцієнти яких дорівнюють $\pm 2$ (див. рис. 62).

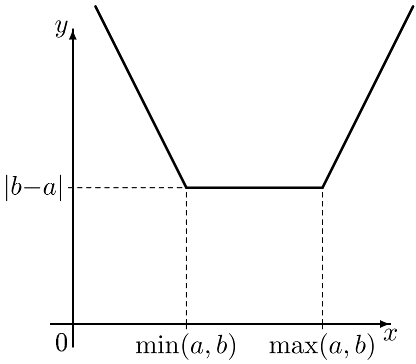



*Рис. 62.* Графік функції $y=|x-a|+|x-b|$.

**Відповідь:**

- якщо $c < |b-a|$, то дійсних розв'язків нема;
- якщо $c = |b-a|$, то $\min(a,b) \le x \le \max(a,b)$;
- якщо $c > |b-a|$, то $x=(a+b+c)/2$ або $x=(a+b-c)/2$.

**Задача 11.** *Розв'язати відносно $x$ рівняння* $|||x-1|-1|-1| = a$.

**Розв'язання.** Побудуємо графік функції $y = |||x-1|-1|-1|$ шляхом послідовного перетворення графіків функцій. Графіки всіх функцій, зображені на рис. 63, складаються з відрізків і променів, кутові коефіцієнти яких дорівнюють $\pm 1$.

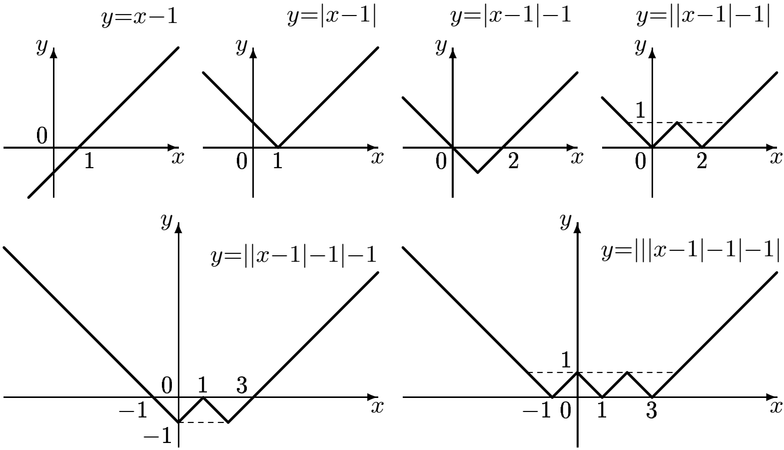



*Рис. 63.* Графіки функцій $y = x - 1$, $y = |x - 1|$, $y = |x - 1| - 1$, $y = ||x - 1| - 1|$, $y = ||x - 1| - 1| - 1$, $y = |||x - 1| - 1| - 1|$.

**Відповідь:**

- якщо $a < 0$, то дійсних коренів нема;
- якщо $a = 0$, то $x = -1 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 3$;
- якщо $0 < a < 1$, то $x = -1 \pm a \ \vee \ x = 1 \pm a \ \vee \ x = 3 \pm a$;
- якщо $a = 1$, то $x = -2 \ \vee \ x = 0 \ \vee \ x = 2 \ \vee \ x = 4$;
- якщо $a > 1$, то $x = -1 - a \ \vee \ x = 3 + a$.

**Задача 12.** *Знайти кількість розв'язків такої системи рівнянь:*

$$\begin{cases} |y| = |x| \\ y^2 + x^2 = 2ax + b \end{cases}.$$

**Розв'язання**[1]**.** Перше рівняння системи еквівалентне такій сукупності:

$$y = x \ \vee \ y = -x,$$

що задає на координатній площині об'єднання двох прямих.

Друге рівняння системи еквівалентне такому рівнянню:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 + b,$$

що на координатній площині задає коло з радіусом $\sqrt{a^2+b}$ і центром в $A(a;0)$, точку $A(a;0)$ або порожню множину залежно від $\operatorname{sign}(a^2+b)$ (див. рис. 64). При цьому центр кола рівновіддалений від обох прямих на відстань $|a|/\sqrt{2}$. Для того, щоб отримати остаточну відповідь, достатньо зауважити, що кожна з прямих не перетинає коло, дотикається до нього або перетинає у двох точках залежно від

$$\operatorname{sign}\left(\sqrt{a^2+b} - \frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{sign}\left(a^2+b-\frac{a^2}{2}\right) = \operatorname{sign}(a^2+2b).$$

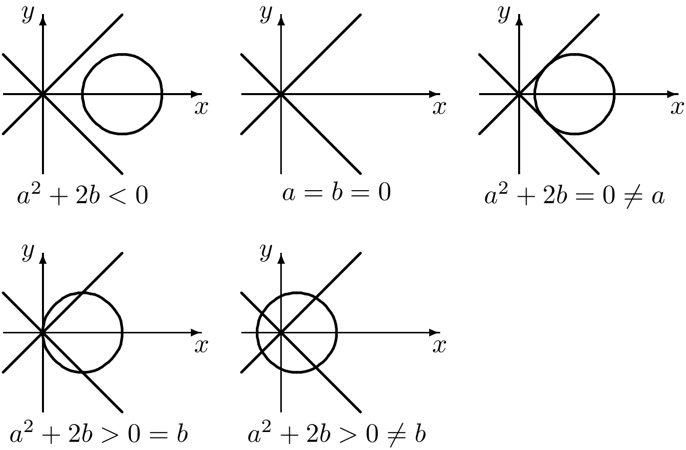



*Рис. 64.* Графіки $|y| = |x|$ і $y^2 + x^2 = 2ax + b$.

[1] Свідомо зосередимося на графічній інтерпретації, замість того, щоб знаходити кількість розв'язків рівняння $2x^2 - 2ax - b = 0$ і враховувати умову $|y| = |x|$.

**Відповідь:**

- якщо $a^2 + 2b < 0$, то дійсних розв'язків нема;
- якщо $a = b = 0$, то дійсний розв'язок $x = y = 0$ єдиний;
- якщо $a^2 + 2b = 0 \neq a$, то дійсних розв'язків два;
- якщо $a^2 + 2b > 0 = b$, то дійсних розв'язків три;
- якщо $a^2 + 2b > 0 \neq b$, то дійсних розв'язків чотири.

**Задача 13.** *Розв'язати рівняння* $|\sin x| + \cos x = a.$

**Розв'язання.** Побудуємо графік функції $f(x) = |\sin x| + \cos x$, що парна й має період $2\pi$. На проміжку $[0; \pi]$, де $\sin x \geq 0$,

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

тобто на цьому проміжку графік функції $f(x)$ — результат паралельного перенесення на вектор $\vec{v}(\pi/4; 0)$ з подальшим розтягом у $\sqrt{2}$ разів вздовж осі ординат графіка функції $y = \cos x$ (див. рис. 65).

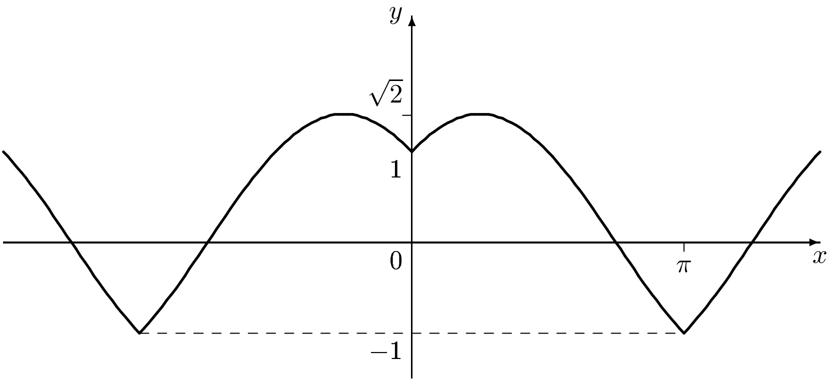



*Рис. 65.* Графік функції $f(x) = |\sin x| + \cos x = a.$

**Відповідь**[1]**:**

- якщо $a < -1$ або $a > \sqrt{2}$, то рівняння дійсних розв'язків не має;
- якщо $a = -1$, то маємо: $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- якщо $-1 < a < 1$, то[2] маємо:

$$x = \pm\left(\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- якщо $a = 1$, то маємо:

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{або} \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- якщо $1 < a < \sqrt{2}$, то маємо:

$$x = \pm\left(\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

  де знаки $\pm$ вибирають незалежно;
- якщо $a = \sqrt{2}$, то маємо:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 8.8. Перетворення співвідношень

**Задача 14.** *Розв'язати рівняння* $\sin x \sin 3x = a$.

**Розв'язання.** Дане рівняння еквівалентне таким рівнянням:

$$\frac{\cos(3x - x) - \cos(3x + x)}{2} = a \;\Leftrightarrow\; \cos 2x - \cos 4x = 2a \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 2a \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2 2x - \cos 2x + 2a - 1 = 0.$$

---

[1] Без подвійного переліку розв'язків.

[2] Можливість вибору різних знаків $\pm$ — наслідок парності $f(x)$, наявність доданка $2k\pi$ — наслідок періодичності функції $f(x)$.

Таким чином, $x$ належить до множини розв'язків рівняння тоді й лише тоді, коли відповідне квадратне рівняння $2y^2-y+2a-1=0$ має дійсний розв'язок $y\in[-1;1]$, що дорівнює $\cos x$. Умовою існування дійсних коренів є справдження такої нерівності:

$$1-4\cdot 2\cdot(2a-1)=9-16a\geq 0,$$

а їхні значення дорівнюють $(1\pm\sqrt{9-16a})/4$. Зауважимо, що менший корінь не перевищує $1/4$. Достатньо перевірити, що цей корінь не менший, ніж $-1$. Більший корінь не менший, ніж $1/4$. Достатньо переконатися, що він не перевищує 1. Таким чином, початкове рівняння еквівалентне системі рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l}1-4\cdot 2\cdot(2a-1)\geq 0\\ \left\{\begin{array}{l}-4\leq 1-\sqrt{9-16a}\\ \cos 2x=(1-\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l}1+\sqrt{9-16a}\leq 4\\ \cos 2x=(1+\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}9-16a\geq 0\\ \left\{\begin{array}{l}\sqrt{9-16a}\leq 5\\ \cos 2x=(1-\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l}\sqrt{9-16a}\leq 3\\ \cos 2x=(1+\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}9\geq 16a\\ \left\{\begin{array}{l}9-16a\leq 25\\ \cos 2x=(1-\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l}9-16a\leq 9\\ \cos 2x=(1+\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}9/16\geq a\\ \left\{\begin{array}{l}-16\leq 16a\\ \cos 2x=(1-\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l}-16a\leq 0\\ \cos 2x=(1+\sqrt{9-16a})/4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-1\leq a\leq 9/16\\ 2x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{9-16a}}{4}+2k\pi\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}0\leq a\leq 9/16\\ 2x=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{9-16a}}{4}+2k\pi\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right..$$

Для запису *відповіді без подвійного переліку коренів* потрібно врахувати, що:

- якщо $a=-1$, то $\cos 2x=(1-\sqrt{9-16a})/4=-1$, $2x=\pi+2k\pi$, де $k\in\mathbb{Z}$;
- якщо $a=0$, то $\cos 2x=(1+\sqrt{9-16a})/4=1$, $2x=2k\pi$, де $k\in\mathbb{Z}$;
- якщо $a=9/16$, то $\sqrt{9-16a}=0$, $\cos 2x=1/4$.

**Відповідь:**

- якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (9/16; +\infty)$, то рівняння дійсних розв'язків не має;
- якщо $a = -1$, то $x = (\frac{1}{2} + k)\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$;
- якщо $a \in (-1; 0)$, то маємо:

$$x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{9 - 16a}}{4} + k\pi, \quad \text{де} \quad k \in \mathbb{Z};$$

- якщо $a = 0$, то $x = k\pi$ або $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$;
- якщо $a \in (0; 9/16)$, то маємо:

$$x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{9 - 16a}}{4} + k\pi, \quad \text{де} \quad k \in \mathbb{Z},$$

  а знаки $\pm$ вибирають незалежно;
- якщо $a = 9/16$, то маємо:

$$x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + k\pi, \quad \text{де } k \in \mathbb{Z}.$$

Подані у розв'язанні задачі коментарі необов'язкові. Їх можна вилучити, замінивши знаком еквівалентного переходу $\Leftrightarrow$.

## 8.9. Показникові й логарифмічні нерівності

**Теорема 78.** *На ОВ* [1] $\quad a^{b_1} > a^{b_2} \Leftrightarrow (a-1)(b_1 - b_2) > 0.$

**Доведення.** Дане твердження — наслідок монотонності показникової функції.

**Зауваження 32.** *У твердженні теореми 78 знак $>$ можна замінити на $<$, $\geq$ чи $\leq$.*

[1] Тут і надалі вираз $a^b$ розумітимемо як значення функції з *додатною* основою $a$. ОВ — область визначення — задається нерівністю $a > 0$.

**Задача 15.** *Розв'язати рівняння* $(x-2)^{x^2-6x+8} \geq 1$.

**Розв'язання.** $1 = (x-2)^0$,

$$(x-2-1)(x^2-6x+8-0) = (x-3)(x-2)(x-4).$$

На ОВ $\{x > 2\}$ нерівність еквівалентна такій нерівності:

$$(x-4)(x-3)(x-2) \geq 0.$$

**Відповідь.** $2 < x \leq 3$ або $4 \leq x$.

**Задача 16.** *Розв'язати рівняння* $(x^2-6x+8)^{x-3} < 1$.

**Розв'язання.** $1 = (x^2-6x+8)^0$, тому на ОВ маємо:

$$\{x^2-6x+8 > 0\} = \{(x-2)(x-4) > 0\} = \{x < 2 \vee x > 4\}.$$

Дана нерівність еквівалентна таким нерівностям:

$$(x^2-6x+8-1)(x-3-0) < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-(3-\sqrt{2}))(x-3)(x-(3+\sqrt{2})) < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{r} x < 3-\sqrt{2} \\ 3 < x < 3+\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Враховуючи те, що $1 < \sqrt{2} = 1,414...$ , отримаємо відповідь.
**Відповідь.** $x < 3-\sqrt{2}$ або $4 < x < 3+\sqrt{2}$.

**Зауваження 33.** *Якщо в останньому прикладі ліву частину початкової нерівності розуміти не як значення показникової функції з додатною основою, а як дійсний степінь дійсного числа, то рівняння має щонайменше ще один розв'язок* $x = 4$. *Повне дослідження такої задачі потребує розгляду всіх можливих раціональних показників* $(x-2)$ *для від'ємних основ* $(x-2)(x-4)$.

**Теорема 79.** *На ОВ* [1] $\log_a b_1 > \log_a b_2 \Leftrightarrow (a-1)(b_1-b_2) > 0$.

[1] Тут і надалі вираз $\log_a b$ розумітимемо як значення логарифмічної функції з додатними основою $a \neq 1$ й аргументом $b$. Область визначення (ОВ) задається нерівностями $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

**Доведення.** Твердження випливає з монотонності логарифмічної функції.

**Зауваження 34.** *У твердженні теореми 79 знак $>$ можна замінити на $<$, $\geq$ чи $\leq$ одночасно.*

**Доведення.** Дане твердження — наслідок монотонності показникової функції.

**Задача 17.** *Розв'язати нерівність:*

$$\log_{x+3}\frac{x-1}{x+2} \leq \log_{x+3} 2.$$

**Розв'язання.** ОВ задається такими нерівностями:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \\ (x-1)/(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x \\ x\neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} -3<x<-2 \\ 1<x \end{array}\right. .$$

*На ОВ* розв'язки нерівності задовольняють такі співвідношення:

$$(x+3-1)\left(\frac{x-1}{x+2}-2\right)=(x+2)\frac{x-1-2x-4}{x+2}=-x-5\leq 0,$$

тобто $-5\leq x$. Останнє ніяк не звужує ОВ.
**Відповідь.** $-3<x<-2$ або $1<x$.

**Теорема 80.** *На ОВ* $\quad \mathrm{sign}\ \log_a b = \mathrm{sign}\ (a-1)(b-1)$.

**Доведення.** Істинність твердження можна встановити, перебравши всі комбінації знаків $(a-1)$ і $(b-1)$.

**Задача 18.** *Розв'язати нерівність:*

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq\ 0.$$

**Розв'язання.** ОВ задається такими нерівностями:

$$\begin{cases} 2-x>0 \\ 2-x\neq 1 \\ x+2>0 \\ x+3>0 \\ x+3\neq 1 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\neq 1 \\ -2<x \\ -3<x \\ x\neq -2 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ x\neq 1 \end{cases} .$$

*На ОВ* розв'язки нерівності задовольняють такі співвідношення:

$$(2-x-1)(x+2-1)(x+3-1)(3-x-1) =$$

$$= (1-x)(x+1)(x+2)(2-x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) \leq 0.$$

**Відповідь.** $-2 < x \leq -1$ або $1 < x < 2$.

**Задача 19.** *Розв'язати нерівність:*

$$\log_{\frac{1}{7}}(10-x^2)\log_{\frac{1}{2}}|\sin x| > 0. \tag{98}$$

**Розв'язання.** ОВ задається такою системою нерівностей:

$$\begin{cases} 10-x^2 > 0 \\ |\sin x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < \sqrt{10} = 3,16227766... \\ x \neq k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Водночас маємо:

$$\log_{\frac{1}{2}}|\sin x| > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}|\sin x| \neq 0 \Leftrightarrow |\sin x| \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

*На перетині ОВ з множиною розв'язків останньої системи* розв'язки нерівності (98) задовольняють таке співвідношення[1]:

$$10-x^2-1 < 0 \Leftrightarrow 9-x^2 < 0 \Leftrightarrow |x| > 3.$$

**Відповідь.** $\left[\begin{array}{l} -\sqrt{10} < x < -\pi \\ -\pi < x < -3 \\ 3 < x < \pi \\ \pi < x < \sqrt{10} \end{array}\right.$.

**Задача 20.** *Розв'язати систему нерівностей:*

$$\begin{cases} \log_{x-1}(5-y) < 0 \\ \log_{2-y}(4-x) < 0 \end{cases}.$$

---

[1]Пряме застосування теореми 80 вказує на таку нерівність: $(1/7-1)(10-x^2-1)(1/2-1)(|\sin x|-1) > 0$, в якій ліворуч 1-ий, 3-ій і 4-ий співмножники від'ємні.

**Розв'язання.** ОВ задається такими нерівностями:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \\ 5-x>0 \\ 2-y>0 \\ 2-y\neq 1 \\ 4-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x \\ x\neq 2 \\ x<5 \\ y<2 \\ y\neq 1 \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<4 \\ x\neq 2 \\ y<2 \\ y\neq 1 \end{cases}.$$

*На ОВ* перша нерівність системи еквівалентна таким твердженням:

$$(x-1-1)(5-y-1)<0 \Leftrightarrow (x-2)(4-y)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ y<4 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 2<x \\ 4<y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x<2.$$

*На перетині ОВ з множиною розв'язків нерівності* $x<2$ друга нерівність системи еквівалентна таким твердженням:

$$(2-y-1)(4-x-1)<0 \Leftrightarrow (1-y)(3-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<1 \\ 3<x \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 1<y \\ x<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<y.$$

**Відповідь.** $\begin{cases} 1<x<2 \\ 1<y<2 \end{cases}.$

**Лема 8.** *Для довільних дійсних $a$ і $b$ справджується така рівність:*

$$\operatorname{sign}\,(|a|-|b|) = \operatorname{sign}\,(a-b)(a+b). \tag{99}$$

**Доведення.** Якщо $a=b=0$, то рівність (99) справджується. Інакше $|a|+|b|>0$, а ліва частина рівності (99) дорівнює:

$$\operatorname{sign}\,(|a|-|b|)(|a|+|b|) = \operatorname{sign}\,(|a|^2-|b|^2) = \operatorname{sign}\,(a^2-b^2).$$

**Задача 21.** *Розв'язати нерівність:*

$$\log_{|x-1|}|x-2|\cdot\log_{|x-3|}|x-4|>0.$$

**Розв'язання.** ОВ задається такою системою нерівностей:

$$\begin{cases} x-1\neq 0 \\ x-1\neq \pm 1 \\ x-2\neq 0 \\ x-3\neq 0 \\ x-3\neq \pm 1 \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 1\pm 1 \\ x\neq 2 \\ x\neq 3 \\ x\neq 3\pm 1 \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\notin\{0,1,2,3,4\}.$$

Здійснимо еквівалентні *на ОВ* перетворення отриманої нерівності:

$$(|x-1|-1)(|x-2|-1)(|x-3|-1)(|x-4|-1)>0,$$

$$(x-1-1)(x-2-1)(x-3-1)(x-4-1)\times$$
$$\times\ (x-1+1)(x-2+1)(x-3+1)(x-4+1)>0,$$

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)x(x-1)(x-2)(x-3)>0,$$

$$x(x-1)(x-2)^2(x-3)^2(x-4)(x-5)>0,$$

$$x(x-1)(x-4)(x-5)>0.$$

Ліва частина отриманої нерівності змінює знак у точках 0, 1, 4, 5. Вона додатна, якщо $5<x$.

**Відповідь.** $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)\cup(2;3)\cup(3;4)\cup(5;+\infty)$.

# Розділ 9. Неперервність функції

У цьому розділі викладено лише *частину* теорії неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, без якої неможливо побудувати диференціальне й інтегральне числення елементарних функцій.

## 9.1. Границя функції

**Означення 98 (Коші).** *Число $A$ — границя функції $f$ за умови, що $x$ прямує до $x_0$, якщо різниця між $A$ та $f(x)$ як завгодно мала за абсолютною величиною для довільного аргументу $x \neq x_0$ з достатньо малого околу $x_0$:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D(f) \backslash \{x_0\}\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (100)$$

*У даному разі пишуть так:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *або* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$.

**Означення 99 (Ґейне).**[1] *Число $A$ — границя функції $f$ за умови, що $x$ прямує до $x_0$, якщо для довільної послідовності аргументів $\{x_n \neq x_0\}$, збіжної до $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до $A$:*

$$\forall\, \{x_n\} \quad \begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D(f) \backslash \{x_0\} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A. \quad (101)$$

**Зауваження 35.** *Означення границі функції $f$ не потребують справдження рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ чи навіть існування $f(x_0)$.*

**Теорема 81.** *Означення 98 і 99 еквівалентні.*

**Доведення.** Очевидно, що з твердження (100) випливає твердження (101). Доведемо від супротивного, що з твердження (101) випливає твердження (100). Нехай для послідовності аргументів $\{x_n\}$, збіжної до $x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до $A$, але при цьому:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta\ \wedge\ |f(x) - A| \geq \varepsilon. \quad (102)$$

---

[1] Генріх Едуард Ґейне (1821–1881) — німецький математик.

Таким чином, існує таке додатне $\varepsilon$, при якому для довільного додатного $\delta$ існує $x$ з області визначення функції $f$, що відрізняється від $x_0$ за абсолютною величиною не більше, ніж на $\delta$, і при цьому абсолютна величина різниці $A$ і $f(x)$ не менша, ніж $\varepsilon$. Тоді для кожного натурального $n$ існує $x_n$, що задовольняє умову (102) для $\delta = 1/n$. Очевидно, що така послідовність $\{x_n\}$ збігається до $x_0$, тому за припущенням (101) послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до $A$, а це суперечить твердженню (102) про те, що значення $f(x_n)$ відрізняються від $A$ за абсолютною величиною не менше, ніж на $\varepsilon > 0$. Виявлена суперечність вказує на те, що припущення не справджується ніколи.

**Зауваження 36.** *Означення границі функції можна поширити на такі випадки:*

1. *Граничне значення аргументу є $+\infty$, $-\infty$ чи $\infty$.*

2. *Граничне значення функції є $+\infty$, $-\infty$ чи $\infty$.*

3. *Однобічні границі:*

   А. *При прямуванні аргументу до граничного значення справа ведуть мову про границю справа:*

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = A$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in D(f)\quad a < x < a + \delta\ \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

   Б. *При прямуванні аргументу до граничного значення зліва ведуть мову про границю зліва:*

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in D(f)\quad a - \delta < x < a\ \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

*У перших двох випадках означення границі функції за Коші потребує незначних змін, аналогічних до тих, які є в означенні нескінченно великої послідовності.*

**Теорема 82.** *Границя в $x_0$ арифметичного виразу функцій, які визначені в околі $x_0$ і мають границі в $x_0$, існує і дорівнює арифметичному виразу відповідних границь функцій, якщо він визначений.*

**Доведення.** Твердження теореми випливає безпосередньо з означення границі функції за Ґейне й наслідку 9 основних теорем 40–41 про границі.

Наприклад:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+4x+x^2}{x+5} = 1; \quad \lim_{x\to 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} = \lim_{x\to 10} \frac{1}{\sqrt{x-1}+3} = \frac{1}{6}.$$

**Теорема 83 (про границю суперпозиції функцій).** *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такі функції, при яких:*

- *функція $f$ визначена в деякому околі $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, причому існує границя: $f_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;*
- *функція $g$ визначена в деякому околі $f_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, причому існує границя: $g_0 = \lim\limits_{x\to f_0} g(x)$.*

*Тоді маємо: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g_0$.*

**Доведення.** Твердження теореми випливає безпосередньо з означення границі функції за Ґейне.

**Означення 100.** *Функція неперервна (неперервна справа, зліва):*

- *у точці числової прямої, якщо вона визначена у цій точці і має в ній границю (границю справа, зліва), яка дорівнює значенню функції у цій точці;*
- *на множині, якщо вона неперервна (неперервна справа, зліва) у кожній точці цієї множини.*

$C(M)$ *— позначення для сукупності всіх функцій, неперервних на множині $M$.*

**Теорема 84.** *Раціональний вираз і суперпозиція неперервних функцій — неперервні функції на відповідних областях визначення.*

**Доведення.** Твердження теореми — наслідок останніх означення і двох теорем.

## 9.2. Теорема про проміжне значення

**Теорема 85 (Коші).** *Якщо неперервна на відрізку функція набуває на його кінцях додатного та від'ємного значення, то існує точка цього відрізка, в якій значення функції дорівнює нулю:*

$$\forall\ f \in C([a;b]) \quad f(a)\cdot f(b) < 0 \ \Rightarrow\ \exists\ c \in [a;b] \quad f(c) = 0.$$

**Доведення** (поділом відрізків навпіл). Не обмежуючи загальності міркувань, розглянемо лише випадок $f(a) < 0 < f(b)$ (див. рис. 66). Якщо ж $f(b) < 0 < f(a)$, то потрібно дослідити функцію $-f(x)$. Побудуємо послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ і $\{c_n\}$:

$$a_1 = a; \qquad b_1 = b, \qquad c_1 = (a_1 + b_1)/2,$$

вибираючи наступні члени послідовностей залежно від $f(c_n)$:

$$\begin{aligned}
f(c_n) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(a_{n+1} = a_n \wedge b_{n+1} = c_n \wedge c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}\right);\\
f(c_n) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(a_{n+1} = c_n \wedge b_{n+1} = b_n \wedge c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}\right);\\
f(c_n) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (a_{n+1} = c_n \wedge b_{n+1} = c_n \wedge c_{n+1} = c_n).
\end{aligned}$$

Тоді для довільного натурального $n$ матимемо:

$$a_n \le b_n; \qquad b_{n+1} - a_{n+1} \le \frac{b_n - a_n}{2}; \qquad f(a_n) \le 0 \le f(b_n).$$

Послідовність $[a_n; b_n]$ задовольняє умови теореми Кантора про вкладені відрізки, тому існує границя:

$$c = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \ \Rightarrow\ f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = 0.$$

**Теорема 86.** *Для довільної неперервної на відрізку функції і довільного числа з проміжку між значеннями функції на його кінцях існує точка цього відрізка, в якій значення функції дорівнює вибраному числу:* $\forall\ f \in C([a;b]) \quad \forall\ d \in [\min(f(a),\ f(b));\ \max(f(a),\ f(b))]$

$$\exists\ c \in [a;b] \quad f(c) = d.$$

**Доведення.** Теорема випливає з попередньої, яку ми застосуємо до функції $f(x) - d$ (випадок, коли $f(a) = f(b) = d$, очевидний).

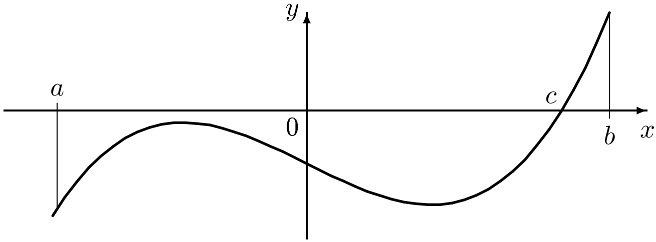



*Рис. 66.* До доведення теореми Коші: графік функції $y = f(x)$ для випадку, коли $f(a) < 0 < f(b)$.

## 9.3. Найменше й найбільше значення

**Теорема 87.** *Неперервна функція на відрізку набуває на ньому найменшого та найбільшого значення:*

$$\forall\ f \in C([a;b]) \quad \exists\ c^-, c^+ \in [a;b] \quad \begin{cases} f(c^-) = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) \\ f(c^+) = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) \end{cases}.$$

**Доведення**. Розглянемо такі послідовності $\{x_n^-\}$, $\{x_n^+\}$, при яких послідовності $\{f(x_n^-)\}$ і $\{f(x_n^+)\}$ збігаються відповідно до точної нижньої та верхньої меж області значень функції $f$ на $[a;b]$. Послідовності $\{x_n^-\}$ та $\{x_n^+\}$ обмежені числами $a$ і $b$, тому існують $c^-$ та $c^+$ з відрізка $[a;b]$ — часткові границі цих послідовностей:

$$\exists\ \{x_{n_k}^-\} \quad \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}^- = c^-; \qquad\qquad \exists\ \{x_{n_k}^+\} \quad \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}^+ = c^+.$$

З неперервності $f$ випливає, що:

$$f(c^-) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}^-) = \inf_{x\in[a;b]} f(x);$$

$$f(c^+) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}^+) = \sup_{x\in[a;b]} f(x).$$

## 9.4. Неперервність оберненої функції

**Теорема 88.** *Функція, обернена до строго монотонної і неперервної на відрізку функції, неперервна.*

**Доведення.** Нехай $f : [a;b] \to [c;d]$, та $g : [c;d] \to [a;b]$ — взаємно обернені монотонні функції, що відповідно означені і зростають на $[a;b]$ та $[c;d]$ (доведення для спадних функцій аналогічне), $f$ — неперервна на $[a;b]$. Розглянемо довільні $x_0$ і $y_0$, при яких:

$$x_0 = g(y_0) \in [a;b]; \qquad y_0 = f(x_0) \in [c;d].$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ означимо:

$$x_- = \max(a; x_0 - \varepsilon); \qquad x_+ = \min(b; x_0 + \varepsilon); \qquad y_\pm = f(x_\pm);$$

$\delta$ — найменше *додатне* з чисел $(y_0 - y_-)$ і $(y_+ - y_0)$ (див. рис. 67).

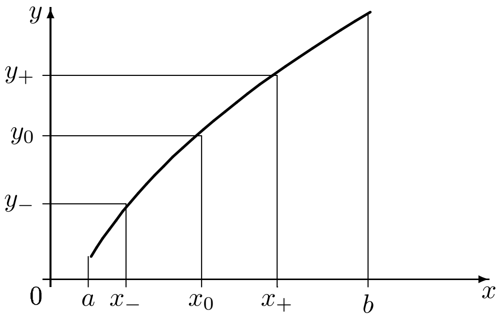



*Рис. 67.* Вибір $y_\pm$ та $x_\pm$ у доведенні теореми 88.

Функції min і max використано для того, щоб не вийти за межі області визначення. Для функцій, заданих на інтервалах, числа $a$ та $b$ потрібно брати відповідно ліворуч і праворуч від $x_0$ з області визначення $f$.

Для довільного $y \in [c;d]$ з монотонності $g$ і такої умови:

$$|y - y_0| < \delta \ \Rightarrow \ y_- < y < y_+ \quad —$$

випливає, що

$$g(y_-) < g(y) < g(y_+) \ \Rightarrow \ |g(y) - x_0| < \varepsilon \quad —$$

функція $g$ неперервна (за Коші).

**Зауваження 37.** *Функція, обернена до строго монотонної і неперервної на інтервалі функції, неперервна. Доведення буде аналогічним до поданого з деякою модифікацією вибору $x_-$ та $x_+$. Наприклад, для дійсних $a$ і $b$ достатньо вибрати:*

$$x_- = \max\left(\frac{a + x_0}{2}, x_0 - \varepsilon\right); \qquad x_+ = \min\left(\frac{b + x_0}{2}, x_0 + \varepsilon\right).$$

**Наслідок 25.** *З того, що неперервними є тригонометричні функції, $y = x^n$ для натурального $n$, $y = a^x$ для $a \in (0; +\infty)\backslash\{1\}$, випливає, що обернені тригонометричні функції, $y = \sqrt[n]{x}$ для натурального $n$, $y = \log_a x$ для $a \in (0; +\infty)\backslash\{1\}$ також неперервні.*

## 9.5. Важливі границі

**Теорема 89.** *Існують такі границі:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e; \tag{103}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e; \tag{104}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \tag{105}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha; \tag{106}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{107}$$

**Доведення.** Нехай $\{x_n\}$ — довільна послідовність, що прямує до $+\infty$. Тоді для достатньо великих $n$ матимемо:

$$0 < [x_n] \le x_n < [x_n] + 1 \ \Rightarrow\ 0 < \frac{1}{[x_n] + 1} < \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{[x_n]},$$

звідси отримаємо:

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}. \tag{108}$$

Однак потрібно врахувати, що

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} = \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{-1} \underset{x_n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$

Таким чином, $e$ — границя крайнього правого члена нерівностей (108) за умови, що $x_n \to +\infty$. Якщо ж $x_n \to -\infty$, то маємо:

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(\frac{1+x_n}{x_n}\right)^{x_n} = \left(\frac{-x_n}{-x_n-1}\right)^{-x_n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{-x_n-1}\right)^{-x_n-1}\left(1+\frac{1}{-x_n-1}\right) \underset{-x_n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$

Для доведення рівностей (103) достатньо згадати співвідношення між нескінченно малими й нескінченно великими послідовностями та використати теорему про три границі.

Рівність (104) випливає з неперервності логарифмічної функції: потрібно взяти значення функції $\log_a x$ від частин рівності (103).

Для доведення рівності (105) можна використати таку заміну:

$$z = a^x - 1 \ \Rightarrow\ \frac{a^x-1}{x} = \frac{z}{\log_a(1+z)} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Рівність (106) — наслідок попередніх рівностей:

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha\ln(1+x)}\ \frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\ \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Отриманий вираз прямує до $\alpha$ за умов, що $x \to 0$, $\alpha\ln(1+x) \to 0$.

Для $x \neq 0$ з достатньо малого околу нуля (див. рис. 68):

$\sin x \ = \sin x \cdot BO^2$ — подвоєна площа рівнобедреного $\triangle ABO$ з кутом $x$ при вершині $O$ та бічними сторонами $AO = BO = 1$;

$x \ = x \cdot BO^2$ — подвоєна площа сектора $ABO$;

$\operatorname{tg} x \ = BC/BO = BC \cdot BO$ — подвоєна площа прямокутного трикутника $\triangle BCO$, що містить у собі вказані трикутник і сектор як підмножини (знаки $x$, $\sin x$ та $\operatorname{tg} x$ однакові).

Тоді маємо:

$$0 < |\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x| \ \Rightarrow \cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1 \ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

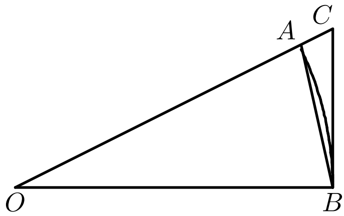



*Рис. 68.* Геометричне обґрунтування вихідного твердження для співвідношення (107).

## 9.6. Обчислення границь функцій

Обчислення границь функцій зводиться до використання основних теорем про границі до знайдених границь (103–107) і неперервності елементарних функцій.

Якщо $a \neq 0$ і $x \to 0$, то маємо:

$$\frac{\sin ax}{x} = a\,\frac{\sin ax}{ax} \to a;$$

$$(1+ax)^{1/x} = \left((1+ax)^{1/ax}\right)^a \to e^a;$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2 \to \frac{1}{2};$$

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{\arcsin x}{\sin \arcsin x} \to 1;$$

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$$

$$= \frac{\sin x}{x}\,\frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1}{\cos x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}} \to \frac{1}{4};$$

$$\frac{1-\sqrt[m]{\cos x}}{x^2} =$$

$$= \frac{1-(1-\sin^2 x)^{1/2m}}{x^2} = \frac{(1-\sin^2 x)^{1/2m}-1}{-\sin^2 x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to \frac{1}{2m};$$

$$\ln\left((1+2x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}\right) = 2x^2\ \operatorname{ctg}^2 x\ \ln(1+2x^2)^{1/2x^2} =$$

$$= 2\cos^2 x\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \ln(1+2x^2)^{1/2x^2} \to 2\ \Rightarrow (1+2x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} \to e^2;$$

$$\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} =$$

$$= \frac{1-\cos x}{x^2} + 4\cos x\ \frac{1-\cos 2x}{(\cos 2x)^2}\ \frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}} \to \frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}\ \frac{x^2}{1-\cos x}\ \frac{\sin x}{x} \to 1;$$

$$\ln\left(\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}\right) = \frac{1}{x-a}\ln\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right) =$$

$$= \frac{1}{x-a}\ln\left(1+\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}\ \frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}\ \frac{\sin a}{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}\ln\left(1+\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}\right),$$

що прямує до $\operatorname{ctg} a$, якщо $x \to a$. За цієї умови маємо:

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)} \to e^{\operatorname{ctg}\ a}.$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}+\frac{b^{1/n}-1}{1/n}\right)\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)^n}{\left(\frac{2}{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}\right)},$$

що прямує до $(\ln a + \ln b)/2$ за умов, що $0 < a$, $0 < b$ і $n \to +\infty$. В результаті отримаємо:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{ab}.$$

Доведемо, що

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Зробимо таку заміну:

$$y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg}\, y = \frac{1 - \frac{x}{x+1}}{1 + \frac{x}{x+1}} = \frac{1}{2x+1} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\, y} - 1\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\, y}{2\operatorname{tg}\, y}.$$

Тоді за умови, що $x \to \infty$, $y \to 0$, отримаємо:

$$x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{y}{\sin y}\,\cos y\,(1 - \operatorname{tg}\, y) \to \frac{1}{2}.$$

## 9.7. Норма і метрика

**Означення 101.** *$E$ — векторний (лінійний) простір над полем $\mathbb{K}$, якщо $E$ — абелева (комутативна) група щодо додавання $+$, в якій означено множення $\cdot$ на елементи поля $\mathbb{K}$, а для довільних $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ маємо:*

$$\begin{aligned} \lambda\cdot(x+y) &= \lambda\cdot x + \lambda\cdot y; \\ 1\cdot x &= x; \\ (\lambda\mu)\cdot x &= \lambda\cdot(\mu\cdot x); \\ (\lambda+\mu)\cdot x &= \lambda\cdot x + \mu\cdot x. \end{aligned}$$

*Елементи $E$ називають точками векторного простору або векторами, а елементи поля $\mathbb{K}$ — скалярами.*

$C([a;b])$ — множина всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій — утворює векторний простір над полем дійсних чисел, бо:

- сума двох неперервних функцій — неперервна функція;
- добуток неперервної функції на дійсне число — неперервна функція.

**Означення 102.** *Означимо для $f \in C([a;b])$ норму — функцію з властивостями (109–111):*

$$|f|_\infty = \max_{x\in[a;b]} |f(x)| \geq 0.$$

Тоді для довільного дійсного $\alpha$ отримаємо:

$$|\alpha f|_\infty = |\alpha| \cdot |f|_\infty. \tag{109}$$

$$|f|_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\; x \in [a;b] \quad f(x) = 0. \tag{110}$$

Для довільних $x \in [a;b]$, $f$, $g \in C[a;b]$ маємо:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

у тому числі і для такого $x_0$, при якому:

$$|f + g|_\infty = \max_{x\in[a;b]} |f(x) + g(x)| = |f(x_0) + g(x_0)|.$$

Члени останньої рівності не перевищують $|f(x_0)| + |g(x_0)|$, що водночас не перевищує $|f|_\infty + |g|_\infty$. Таким чином, справджується *нерівність трикутника*:

$$|f + g|_\infty \leq |f|_\infty + |g|_\infty. \tag{111}$$

Отже, запроваджена норма у векторному просторі неперервних функцій має такі самі властивості, як і довжина напрямленого відрізка на площині чи у просторі.

**Означення 103.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Якщо для множини $X$ існує така функція $\rho : X \times X \to [0; +\infty)$, при якій:*

- $\rho(f, g) = \rho(g, f)$;
- $\rho(f, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = g$;
- $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$,

*то $\rho$ називають метрикою (відстанню), пару $(X, \rho)$ — метричним простором, а всі елементи $X$ — точками метричного простору $(X, \rho)$.*

2. *Послідовність $\{x_n\}$ збігається до $x$ у метричному просторі $(X, \rho)$, якщо відстань $\rho(x_n, x)$ збігається до нуля:*

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

3. *Послідовність $\{x_n\}$ обмежена у метричному просторі $(X, \rho)$, якщо послідовність $\{\rho(x_n, x_1)\}$ обмежена*[1].

4. *$\bar{A}$ — замикання множини $A$ — множина всіх границь послідовностей, члени яких є елементами $A$.*

5. *Множина замкнена, якщо вона збігається зі своїм замиканням.*

6. *Внутрішньою точкою множини $A$ метричного простору $(X, \rho)$ є $a$, якщо деякий окіл $a$ — підмножина $A$:*

$$\exists\; \varepsilon > 0 \quad \{x \in X \mid \rho(x, a) < \varepsilon\} \subset A.$$

*Множину таких внутрішніх точок позначають через* $\operatorname{Int} A$*:*

$$\operatorname{Int} A \subset A \subset \bar{A}.$$

Для множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ метрикою є $\rho(x, y) = |x - y|$. У даному разі $(a; b)$ — множина внутрішніх точок, $[a; b]$ — замикання проміжку з кінцями $a$ і $b$.

Для множини неперервних на відрізку функцій $C([a; b])$ метрикою є $\rho(f, g) = |f - g|_\infty$. В даному разі ведуть мову про метрику, породжену нормою векторного простору.

Для скорочення запису міркувань надалі позначатимемо відповідні *метричні простори* через $\mathbb{R}$ та $C([a; b])$.

---

[1] Замість $x_1$ в означенні можна вибрати довільну точку метричного простору.

## 9.8. Рівномірна неперервність

**Означення 104.** *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рівномірно неперервна на множині $X$, якщо різниця між значеннями функції за абсолютною величиною як завгодно мала для достатньо малої за абсолютною величиною різниці аргументів рівномірно на $X$:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 \ \ \forall\ x_1, x_2 \in X \ \ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

**Теорема 90.** *Якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона на ньому рівномірно неперервна.*

**Доведення** (від супротивного). Припустимо, що

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \exists\ r_n, s_n \in [a; b] \quad \begin{cases} |r_n - s_n| < 1/n \\ |f(r_n) - f(s_n)| > \varepsilon \end{cases}. \tag{112}$$

Послідовності $\{r_n\}$ і $\{s_n\}$ обмежені кінцями відрізка $[a; b]$. Існує збіжна підпослідовність $\{r_{n_k}\}$, за якою можна вибрати збіжну підпослідовність $\{s_{n_{k_j}}\}$. Таким чином, не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що послідовності $\{r_n\}$ і $\{s_n\}$ збігаються до певного $r \in [a; b]$. З неперервності функції $f$ маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f(r) = \lim_{n\to+\infty} f(s_n),$$

що суперечить припущенню (112).

## 9.9. Повнота простору функцій на відрізку

**Означення 105.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Послідовність $\{x_j\}$ елементів метричного простору $(X, \rho)$ фундаментальна (послідовність Коші), якщо для всіх достатньо великих номерів членів цієї послідовності відстань між її елементами як завгодно мала:*

   $$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ J \in \mathbb{N} \quad \forall\ j,\ k > J \quad \rho(x_j, x_k) < \varepsilon.$$

   *Інакше кажучи, відстань між членами послідовності збігається до нуля при прямуванні номерів членів послідовності до нескінченності.*

2. *Метричний простір повний, якщо будь-яка його фундаментальна послідовність має границю.*

**Теорема 91.** *Метричні простори* $\mathbb{R}$ *і* $C([a;b])$ — *повні.*

**Доведення.** Доведемо збіжність послідовності дійсних чисел $\{x_j\}$ за умови, що

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ J \in \mathbb{N} \quad \forall\ j,\ k > J \quad |x_j - x_k| < \varepsilon. \tag{113}$$

Виберемо $\varepsilon = 1$ і знайдемо для нього відповідне $J$ згідно з твердженням (113). Виберемо:

$$M_- = \min(x_1, x_2, \ldots, x_J, x_{J+1}-1); \quad M_+ = \max(x_1, x_2, \ldots, x_J, x_{J+1}+1).$$

Тоді всі члени послідовності $\{x_j\}$ обмежені знизу та зверху відповідно числами $M_-$ та $M_+$. Отже, існує підпослідовність $\{x_{j_k}\}$, що збігається до певного $x_0$. Водночас маємо:

$$|x_0 - x_j| \le |x_0 - x_{j_k}| + |x_{j_k} - x_j|,$$

де перший доданок правої частини нерівності як завгодно близький до 0 для достатньо великого $k$, а другий — для достатньо великих $k$ та $j$. Маємо:

$$\left\{\begin{array}{llllll} \forall\ \varepsilon > 0 & \exists & K_1 \in \mathbb{N} & \forall\ k > K_1 & & |x_0 - x_{j_k}| < \varepsilon/2 \\ \forall\ \varepsilon > 0 & \exists & J, K_2 \in \mathbb{N} & \forall\ k > K_2 & \forall\ j > J & |x_{j_k} - x_j| < \varepsilon/2 \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ J \in \mathbb{N},\ K = \max(K_1, K_2) \quad \forall\ j > J \quad \forall\ k > K$$

$$|x_0 - x_j| \le |x_0 - x_{j_k}| + |x_{j_k} - x_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

У результаті отримаємо:

$$x_0 = \lim_{j \to +\infty} x_j,$$

що й потрібно було довести.

Доведемо повноту простору неперервних на відрізку функцій. Якщо послідовність функцій $\{f_j\}$ фундаментальна в $C([a;b])$, то маємо:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ J \in \mathbb{N}\ \forall\ j, k > J\ \forall\ x \in [a;b] \quad |f_j(x) - f_k(x)| < \varepsilon. \tag{114}$$

Отже, для довільного $x \in [a;b]$ послідовність значень $\{f_j(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$. Тому існує

$$f_0(x) = \lim_{j\to+\infty} f_j(x). \tag{115}$$

Після граничного переходу $k \to +\infty$ в (114) маємо:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, J \in \mathbb{N} \quad \forall\, j > J \quad \forall\, x \in [a;b] \quad |f_j(x) - f_0(x)| \le \varepsilon. \tag{116}$$

Інакше кажучи, збіжність функцій (115) рівномірна на $[a;b]$.

Доведемо неперервність функції $f_0$ на $[a;b]$ від супротивного. Припустимо, що існують $x \in [a;b]$ та збіжні до $x$ такі послідовності $\{r_j\}$ та $\{s_j\}$, при яких $\lim\limits_{j\to+\infty} f_0(r_j) \neq \lim\limits_{j\to+\infty} f_0(s_j)$. Але $|f_0(r_j) - f_0(s_j)|$ не перевищує таку суму:

$$|f_0(r_j) - f_k(r_j)| + |f_k(r_j) - f_k(s_j)| + |f_k(s_j) - f_0(s_j)|,$$

де перший та останній доданки як завгодно близькі до 0 для достатньо великого $k$ за рахунок рівномірної збіжності (116). Для вибраного значення $k$ середній доданок як завгодно близький до 0 для достатньо великого $j$ за рахунок неперервності функції $f_k$ у точці $x \in [a;b]$.

**Наслідок 26.** *Узагальнимо запроваджені поняття на багатовимірні простори:*

1. *Якщо на $\mathbb{R}^n$ запровадити одну з норм:*

$$|x|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|; \qquad |x|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}; \qquad |x|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} |x_j|,$$

   *то простір $\mathbb{R}^n$ — повний відносно метрики, породженої такою нормою.*

2. *У $\mathbb{R}^n$ будь-яка обмежена послідовність має границю.*

3. *Неперервна на обмеженій замкненій множині*[1] *функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ рівномірно неперервна на ній.*

---

[1] З обмеженості множини в $\mathbb{R}^n$ випливає, що ця множина — підмножина декартового добутку відрізків.

**Доведення.** З фундаментальності послідовності векторів випливає фундаментальність і збіжність послідовностей координат, бо для кожної із запропонованих норм абсолютна величина будь-якої координати вектора не перевищує його норми.

Щодо існування окремої границі обмеженої послідовності, то в доведенні узагальнення відповідної теореми декартів добуток відрізків, що містить нескінченну кількість елементів послідовності, потрібно ділити на $2^n$ подібних до нього "гіперпаралелепіпедів" (декартових добутків відрізків), поділивши кожен відрізок значень координат навпіл. Доведення рівномірної неперервності не потребує ніяких змін, крім позначення для норми.

**Зауваження 38.** *Розглянемо поняття збіжності у багатовимірних просторах:*

1. *Поняття границі та неперервності функції без будь-яких ускладнень можна поширити на функції з одного метричного простору в інший (наприклад, з $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^m$), використовуючи запропоноване означення збіжності та означення неперервності за Ґейне. В означенні неперервності за Коші тоді потрібно замінити абсолютні величини різниць на відстані у відповідних метричних просторах.*

2. *Замкнена підмножина повного метричного простору сама є повним метричним простором відносно тієї самої метрики.*

## 9.10. Стискання метричного простору

**Означення 106.** *Відображення $F : X \to X$ стискає метричний простір $(X, \rho)$, якщо відстань між образами будь-яких двох точок метричного простору не перевищує добутку відстані між цими точками на деяку додатну сталу, що менша, ніж 1:*

$$\exists\ \alpha \in\ (0;1) \quad \forall\ x_1, x_2 \in X \quad \rho(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha\rho(x_1, x_2).$$

**Теорема 92.** *Якщо відображення $F : X \to X$ стискає повний метричний простір $(X, \rho)$, то існує єдина нерухома точка цього відображення $x = F(x)$.*

**Доведення.** Згідно з умовою, існує така стала $\alpha \in (0;1)$, при якій для довільних $x_1$, $x_2 \in X$:

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) \le \alpha\rho(x_1, x_2).$$

Для довільного $x_0 \in X$ побудуємо таку послідовність:

$$x_n = F(x_{n-1}).$$

Тоді отримаємо:

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(F(x_{n-1}, F(x_n)) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) \le \cdots \le \alpha^n\rho(x_0, x_1).$$

Якщо $j < k$ — натуральні, то маємо:

$$\begin{aligned}\rho(x_j, x_k) &\le \rho(x_j, x_{j+1}) + \rho(x_{j+1}, x_{j+2}) + \cdots + \rho(x_{k-1}, x_k) \ \le \\ &\le (\alpha^j + \alpha^{j+1} + \cdots + \alpha^{k-2} + \alpha^{k-1})\rho(x_0, x_1) \ = \\ &= \alpha^j\rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{k-j-1}) \ \le \ \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha}\cdot\alpha^j,\end{aligned}$$

де останній вираз прямує до нуля, якщо $j$ прямує до нескінченності. Отже, послідовність $\{x_n\}$ — фундаментальна у повному метричному просторі, а тому збіжна до деякого $x$. Водночас маємо:

$$\rho(x, F(x)) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, F(x)) \le \rho(x, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, x),$$

де останні два доданки як завгодно близькі до 0 для достатньо великого $n$. Таким чином, $\rho(x, F(x)) = 0$ і $x = F(x)$.

Якщо $x$, $y$ — нерухомі точки відображення $F$, то маємо:

$$0 = \rho(x, y) - \rho(F(x), F(y)) \ge \rho(x, y)\cdot(1-\alpha) \ge 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0.$$

Остання рівність еквівалентна рівності $x = y$.

**Зауваження 39.** *Доведення теореми вказує на спосіб знаходження нерухомої точки $x$ як границі послідовності:*

$$x = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{F(F(F(\cdots F(}_{n \text{ разів}}x_0)\cdots))).$$

# Розділ 10. Похідна

У цьому розділі обмежимося розглядом функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

## 10.1. Означення і зміст. Дотична і нормаль

**Означення 107.** *Нехай функція f визначена в околі $x_0$. Для точки $x \neq x_0$ з цього околу різницю $x - x_0$ називають приростом аргументу*[1] *і позначають через $\Delta x$. Різницю $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називають приростом функції f у точці $x_0$, що відповідає приросту аргументу $\Delta x$.*

*Похідною*[2] *функції f (її позначають так: $f'(x_0)$ або $df(x_0)/dx$) у точці $x_0$ області визначення $f$ називають границю відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу в точці $x_0$, якщо вона існує, коли приріст аргументу прямує до нуля:*

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{117}$$

Якщо границя $f'(x_0)$ дійсна, то маємо: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$

$$0 < |\Delta x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x| < \varepsilon|\Delta x|. \tag{118}$$

*Для функції, означеної на відрізку $[a; b]$, похідну в точці, що обмежує область визначення, будемо розуміти як відповідну однобічну границю:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; \qquad f'(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

*Такі границі називають однобічними похідними.*

*Позначимо $f(x)$ через $f^{(0)}(x)$. Похідна функції $f$ у точці $x$ довільного натурального порядку визначається рекурентно:*

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

---

[1] Приріст аргументу може бути від'ємним або додатним, але обов'язково відмінним від 0.

[2] Означення похідної майже одночасно сформулювали англійський математик і фізик Ісаак Ньютон (1642–1727) та німецький математик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716).

*Використовують також позначення*[1] $f''$ *і* $f'''$ *відповідно для 2-ої та 3-ої похідних.*

*Процес знаходження похідної називають диференціюванням.*

*Диференційовна у точці функція — функція, для якої у цій точці визначена дійсна*[2] *похідна.*

*Диференційовна на множині* $X$ *функція — функція, диференційовна у кожній точці* $X$.

*Неперервно диференційовна на множині* $X$ *функція — функція, похідна якої неперервна на множині* $X$ *функція.*

**Зауваження 40.** *Очевидна тотожність:*

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\Delta x.$$

*З цієї рівності та диференційовності* $f$ *в* $x_0$ *випливає неперервність* $f$ *у* $x_0$. *Проте з неперервності не випливає диференційовність. Наприклад, функція* $y(x) = |x|$ *не має похідної у нулі. Більше того, Больцано та Вейєрштрасс побудували функції, які неперервні на відрізку і не мають похідної у жодній точці цього відрізка.*

*Механічний зміст похідної:* якщо функція описує переміщення (швидкість) тіла, то її похідна описує швидкість (прискорення) тіла. Інакше кажучи, похідна описує *миттєву швидкість* зміни функції, аргумент якої — час.

Точки $(x_0; f(x_0))$ та $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ належать до графіка $\{y = f(x)\}$, вираз під знаком границі в означенні (117) — кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через ці дві точки. З огляду на це похідна має прозорий *геометричний зміст* — граничне значення кутового коефіцієнта прямої, що перетинає графік функції у точках $(x_0; f(x_0))$ і $(x_0 + \Delta x; f(x_0) + \Delta x)$ за умови, що $\Delta x \to 0$ (див. рис. 69).

---

[1] Позначення $df/dx$ належить Лейбніцу, $f'(x)$ — Жозефу Луї Лаґранжу (1736–1813) — французькому математику, автору фундаментальних праць з математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, аналітичної механіки, варіаційного числення, алгебри та теорії чисел. У неявному вигляді похідною при розв'язуванні задач користувалися Пьєр Ферма (1601–1665) та Блез Паскаль (1623–1662).

[2] Відмінна від $-\infty$ та $+\infty$.

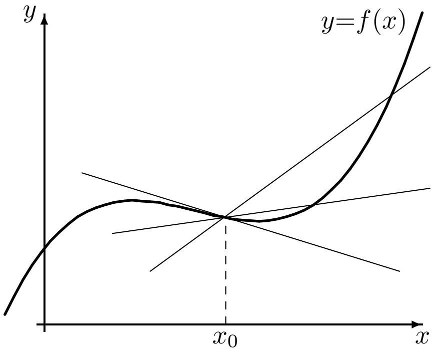



*Рис. 69.* Графік функції $y = f(x)$ і прямі, що проходять через точку графіка $(x_0; f(x_0))$.

**Означення 108.** *Взаємно перпендикулярні прямі, що проходять через $(x_0; f(x_0))$ і задаються такими рівняннями:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); \qquad x - x_0 + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0 \quad —$$

*називають відповідно дотичною і нормаллю до графіка $\{y = f(x)\}$ у точці $(x_0; f(x_0))$.*

**Означення 109.** *Для диференційовної в точці $x$ функції $f$ означимо в околі нуля лінійну функцію приросту аргументу $\Delta x$:*

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \quad —$$

*диференціал функції $f$ у точці $x$.*

**Зауваження 41.** *Диференціал функції $f$ є головною частиною приросту функції у тому розумінні, що*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - df(x)}{\Delta x} = 0.$$

*Якщо припустити, що $y(x) = x$, то $dy(x) = dx = \Delta x$. Тому для довільної диференційовної в $x$ функції $f$ виправданий запис:*

$$df(x) = f'(x)\ dx,$$

*що узгоджується із записом:*

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

*У даному разі* $\frac{d}{dx}$ *— позначення для диференціювання (визначення похідної) за змінною* $x$*.*

## 10.2. Основні правила обчислення похідних

**Теорема 93.** *Нехай похідні функцій* $f$ *і* $g$ *визначені у точці* $x$, $C$ *— стала. Тоді матимемо:*

$$\begin{aligned} (C)' &= 0; && (119)\\ (C\cdot f(x))' &= C\cdot f'(x); && (120)\\ (f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x); && (121)\\ (f(x)\cdot g(x))' &= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x); && (122)\\ g(x)\neq 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}. && (123) \end{aligned}$$

*Інакше кажучи, для диференційовних функцій:*

- *похідна сталої дорівнює нулю;*
- *сталу можна виносити за знак похідної;*
- *похідна суми дорівнює сумі похідних;*
- *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої на значення другої та значення першої на похідну другої;*
- *похідна відношення двох функцій (за умови, що знаменник відмінний від нуля) дорівнює відношенню різниці добутків похідної чисельника на знаменник і чисельника на похідну знаменника до квадрата знаменника.*

**Доведення.** Справджуються такі рівності:

$$\frac{Cf(x+\Delta x)-Cf(x)}{\Delta x} = C\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

$$\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x};$$

$$\frac{f(x+\Delta x)\ g(x+\Delta x)-f(x)\ g(x)}{\Delta x}=$$

$$=f(x+\Delta x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x);$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{1}{g(x)\ g(x+\Delta x)}\times$$

$$\times\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right).$$

Рівності (120–123) отримуються граничним переходом $\Delta x\to 0$ з використанням означення похідної і неперервності диференційовної функції.

**Зауваження 42.** *Рівність (121) можна поширити на довільну кількість доданків без будь-яких змін. Узагальнення рівності (122) для* $n$ *співмножників має такий вигляд:*

$$(f_1(x)\ f_2(x)\cdots f_n(x))'=$$

$$=f_1'(x)\ f_2(x)\cdots f_n(x)+f_1(x)\ f_2'(x)\cdots f_n(x)+\cdots+f_1(x)\ f_2(x)\cdots f_n'(x),$$

*що у випадку, коли* $f_1(x)\ f_2(x)\cdots f_n(x)\neq 0$, *еквівалентне такій рівності:*

$$\frac{(f_1(x)\ f_2(x)\ f_3(x)\cdots f_n(x))'}{f_1(x)\ f_2(x)\ f_3(x)\cdots f_n(x)}=\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\frac{f_3'(x)}{f_3(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

**Теорема 94 (про похідну оберненої функції).** *Нехай* $f:(a;b)\to(c;d)$; $\varphi:(c;d)\to(a;b)$ *— взаємно обернені функції,* $x_0=\varphi(y_0)\in(a;b)$, $f'(x_0)\neq 0$. *Тоді існує:*

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(\varphi(y_0))}.$$

**Доведення.** Якщо приріст $\Delta y$ достатньо малий за абсолютною величиною, то $y_0+\Delta y$ належить до $(c;d)$, існує таке $x_0+\Delta x$ з інтервалу $(a;b)$, при якому:

$$f(x_0+\Delta x) = y_0+\Delta y.$$

Функція $\varphi$ — неперервна в $y_0$ (як обернена до неперервної), тому $\Delta x \to 0$, якщо $\Delta y \to 0$. Твердження теореми випливає з таких рівностей:

$$\frac{\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)}{\Delta y} = \frac{x_0+\Delta x - x_0}{y_0+\Delta y - y_0} = \left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)^{-1},$$

якщо в них здійснити граничний перехід $\Delta x$, $\Delta y \to 0$.

Правило диференціювання оберненої функції має прозорий геометричний зміст. Кут, що вимірюється від додатного напряму осі абсцис до дотичної до кривої $\{y=f(x)\}$, тобто до кривої $\{x=\varphi(y)\}$ для взаємно обернених $f$ і $\varphi$, доповнює до $\pi/2$ кут, що вимірюється від дотичної до додатного напряму осі ординат. Добуток тангенсів цих кутів — кутових коефіцієнтів дотичної у системах координат $xy$ та $yx$ — дорівнює 1 (див. рис. 70).

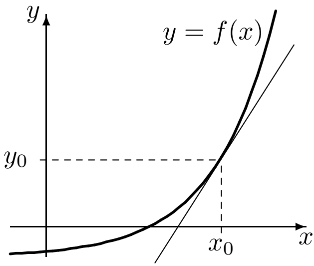



*Рис. 70.* Геометричний зміст правила диференціювання оберненої функції.

**Теорема 95 (про диференціювання складеної функції).** *Нехай для функцій $f:(a;b)\to(c;d)$, $g:(c;d)\to(r;s)$ і дійсних чисел $x_0\in(a;b)$, $y_0=f(x_0)$ існують $f'(x_0)$ та $g'(y_0)$. Тоді також існує:*

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0). \tag{124}$$

**Доведення.** Для довільної послідовності (відмінних від нуля) приростів $\Delta x_n$, яка збігається до нуля, позначимо через:

$$y_n = f(x_0 + \Delta x_n); \qquad \Delta y_n = y_n - y_0 = f(x_0 + \Delta x_n) - f(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тоді справджується хоча б одне з таких тверджень:

1. З даної послідовності приростів можна виділити підпослідовність з нескінченною кількістю елементів — таких *всіх* $\Delta x_{n_k}$, при яких $\Delta y_{n_k} \neq 0$. Тоді отримаємо:

$$\frac{g(f(x_0 + \Delta x_{n_k})) - g(f(x_0))}{\Delta x_{n_k}} =$$

$$= \frac{g(y + \Delta y_{n_k}) - g(y_0)}{\Delta y_{n_k}} \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x_{n_k}) - f(x_0)}{\Delta x_{n_k}},$$

   де права частина останньої рівності збігається до правої частини рівності (124), якщо $k \to +\infty$.

2. З даної послідовності приростів можна виділити підпослідовність з нескінченною кількістю елементів — таких *всіх* $\Delta x_{n_k}$, при яких $\Delta y_{n_k} = 0$. Тоді, враховуючи існування $f'(x_0)$, маємо: $f'(x_0) = 0$. Для всіх натуральних $k$ отримаємо:

$$0 = \frac{g(f(x_0 + \Delta x_{n_k})) - g(f(x_0))}{\Delta x_{n_k}} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

З довільності вибору послідовності приростів випливають існування похідної складеної функції $g(f(x))$ і рівність (124).

## 10.3. Похідні основних елементарних функцій

**Теорема 96.** $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ *для всіх* $x > 0$;

$$(a^x)' = a^x \ \ln a; \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (\mathrm{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$
$$(\mathrm{sh}\ x)' = \mathrm{ch}\ x; \qquad (\mathrm{ch}\ x)' = \mathrm{sh}\ x;$$
$$(\mathrm{th}\ x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}; \qquad (\mathrm{cth}\ x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

**Доведення.** Використаємо вже знайдені границі, правила знаходження похідних і неперервність елементарних функцій.

Для довільного додатного $x$ маємо:

$$\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \alpha x^{\alpha-1}.$$

Якщо степенева функція $y(x) = x^\alpha$ визначена і для від'ємних $x$, то всі ці співвідношення також справджуються. Крім того, для додатних $\alpha$ і $\Delta x$ отримаємо:

$$\frac{(0+\Delta x)^\alpha - 0^\alpha}{\Delta x} = (\Delta x)^{\alpha-1} \xrightarrow[\Delta x\to 0+0]{} \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha > 1, \\ 1, & \text{якщо } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{якщо } \alpha < 1. \end{cases}$$

Дійсна похідна степеневої функції $y = x^\alpha$ у точці $x = 0$ не існує для $\alpha \in (0;1)$. У даному разі вісь ординат дотична до графіка $y = x^\alpha$ у точці (0;0).

Для довільних дійсного $x$ та додатного $a$ маємо:

$$\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} a^x \cdot \ln a.$$

Функція $\log_a x$ обернена до функції $x = a^y$, тому маємо:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Для довільного дійсного $x$ маємо:

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cdot \sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \cos x.$$

З формул зведення й правила диференціювання складеної функції випливає, що

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

За правилом диференціювання відношення функцій маємо:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{tg}\ x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}; \\
(\mathrm{ctg}\ x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

Функція $\arcsin x$ обернена до функції $x = \sin y$ і визначена на $[-1; 1]$. За правилом обчислення похідної оберненої функції отримаємо:

$$(\arcsin\ x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

врахувавши додатність $\cos y$ для $y \in (-\pi/2; \pi/2)$. Водночас маємо:

$$(\arccos\ x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\ x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Функція $\mathrm{arctg}\ x$ обернена до функції $x = \mathrm{tg}\ y$, де $y \in (-\pi/2; \pi/2)$. За правилом обчислення похідної оберненої функції маємо:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{arctg}\ x)' &= \left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)^{-1} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}; \\
(\mathrm{arcctg}\ x)' &= \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\ x\right)' = -\frac{1}{1 + x^2}.
\end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо:

$$(\mathrm{sh}\ x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\ x;$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ch} x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x; \\
(\operatorname{th} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \\
(\operatorname{cth} x)' &= \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},
\end{aligned}
$$

де останні рівності — наслідок співвідношення $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

## 10.4. Відношення приростів і похідні

**Теорема 97 (Ферма).** *Якщо функція $f$ набуває екстремального значення у точці $x_0$, в якій вона має похідну, то $f'(x_0) = 0$.*

**Доведення.** В околі $x_0$ для $x \neq x_0$ маємо:

$$
f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).
$$

Проаналізуємо цю рівність:

1. Якщо $f'(x_0)$ — границя відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу — додатна, то:
   - для $x > x_0$ з достатньо малого околу $x_0$ маємо: $f(x) > f(x_0)$;
   - для $x < x_0$ з достатньо малого околу $x_0$ маємо: $f(x) < f(x_0)$.
2. Якщо ж $f'(x_0) < 0$, то:
   - для $x > x_0$ з достатньо малого околу $x_0$ маємо: $f(x) < f(x_0)$;
   - для $x < x_0$ з достатньо малого околу $x_0$ маємо: $f(x) > f(x_0)$.

Для того, щоб $f(x_0)$ було найбільшим чи найменшим в околі $x_0$ значенням функції $f$, необхідно, щоб $f'(x_0) = 0$.

**Теорема 98 (Ролль).**[1] *Якщо неперервна на відрізку функція набуває на його кінцях однакових значень і диференційовна у всіх внутрішніх точках цього відрізка, то існує така внутрішня точка цього відрізка, в якій значення похідної даної функції дорівнює* 0*:*

---

[1] Мішель Ролль (1652–1719) — французький математик. Довів дану теорему для многочленів за допомогою алгебраїчних методів.

$$f \in C([a;b]) \;\wedge\; f(a) = f(b) \;\wedge\; (\forall\, x \in (a;b)\ \exists\ f'(x))$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\, c \in (a;b) \quad f'(c) = 0.$$

**Доведення.** Якщо функція $f$ стала на $[a;b]$, то $f'(x) = 0$ на $(a;b)$.

Якщо у деяких точках $(a;b)$ функція $f$ набуває значень, відмінних від $f(a) = f(b)$, то за $c$ виберемо точку з $(a;b)$, в якій $f$ набуває найбільшого чи найменшого значення на $[a;b]$. Згідно з теоремою Ферма, $f'(c) = 0$.

**Теорема 99 (Лаґранж).** *Якщо функція неперервна на відрізку й диференційовна у всіх його внутрішніх точках, то існує така внутрішня точка цього відрізка, в якій значення похідної даної функції дорівнює відношенню приросту функції на всьому відрізку до приросту аргументу — довжини цього відрізка:*

$$f \in C([a;b]) \;\wedge\; \forall\, x \in (a;b)\ \exists\ f'(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\, c \in (a;b) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Доведення.** Ця *формула скінченних приростів* випливає зі справдження умов теореми Ролля для функції:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a); \qquad h(a) = h(b) = f(a).$$

Теорема Лаґранжа стверджує лише про існування, а не про кількість відповідних точок $c$. Для функції, графік якої подано на рис. 71, таких точок 3.

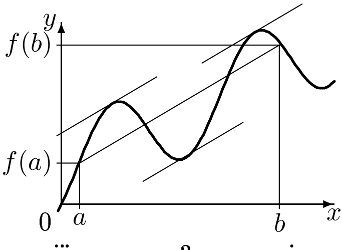



*Рис. 71.* Графік функції, що має 3 точки, існування яких стверджується теоремою Лаґранжа.

**Теорема 100 (Коші).** *Якщо дві функції неперервні на відрізку й диференційовні у всіх внутрішніх точках цього відрізка, причому похідна однієї з них у кожній такій точці відмінна від нуля, то існує внутрішня точка відрізка, в якій відношення похідних функцій дорівнює відношенню відповідних приростів цих функцій на всьому відрізку*

$$\forall\ f, g \in C([a;b])\ \wedge\ \forall\ x \in (a;b)\ \exists\ f'(x)\ \wedge\ \exists\ g'(x) \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\ c \in (a;b) \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

**Доведення.** Перш за все, зауважимо, що $g(a) \neq g(b)$, інакше маємо суперечність з теоремою Ролля. Умови цієї теореми справджуються для такої функції:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)); \qquad h(a) = h(b) = 0,$$

тому існує таке $c \in (a;b)$, при якому:

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0.$$

## 10.5. Застосування теорем Лаґранжа і Ролля

*Для всіх* $x > -1$, $x \neq 0$ маємо:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. \tag{125}$$

Справді, $(\ln(1+x))' = 1/(1+x)$, тому, згідно з теоремою Лаґранжа, отримаємо:

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1} = \frac{1}{1+c},$$

де $c$ розташоване між 0 та $x$. Тоді матимемо:

$$x > 0\ \Rightarrow\ 0 < c < x\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} < 1;$$

$$x < 0\ \Rightarrow\ 0 > c > x\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} > 1.$$

Щоб отримати нерівність (125), достатньо помножити отримані нерівності на $x$.

*Для всіх $x > -1$ і $\alpha > 1$ маємо:*

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \tag{126}$$

*де рівність справджується лише для $x = 0$.* Справджується рівність:

$$((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

Згідно з теоремою Лаґранжа, існує таке $c$ між 0 та $x \neq 0$, при якому:

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha(1+c)^{\alpha-1}.$$

Тому отримаємо:

$$x > 0 \;\Rightarrow\; 0 < c < x \;\Rightarrow\; \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha(1+c)^{\alpha-1} > \alpha;$$

$$x < 0 \;\Rightarrow\; 0 > c > x \;\Rightarrow\; \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha(1+c)^{\alpha-1} < \alpha.$$

Щоб отримати нерівність (126), достатньо помножити отримані нерівності на $x$.

*Для всіх дійсних $x$ маємо: $e^x \geq 1 + x$. Рівність справджується лише для $x = 0$.* Справді, $(e^x)' = e^x$, і для $x \neq 0$, згідно з теоремою Лаґранжа, існує таке $c$ між 0 та $x$, при якому:

$$\frac{e^x - e^0}{x} = e^c.$$

У результаті отримаємо:

$$x > 0 \;\Rightarrow\; 0 < c < x \;\Rightarrow\; \frac{e^x - 1}{x} = e^c > 1;$$

$$x < 0 \;\Rightarrow\; 0 > c > x \;\Rightarrow\; \frac{e^x - 1}{x} = e^c < 1.$$

Щоб отримати нерівність $e^x \geq 1 + x$, достатньо помножити отримані нерівності на $x$.

*Якщо $P(x)$ — многочлен степеня $n$ змінної $x$, що має $n$ різних коренів $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, то $P'(x)$ має $n-1$ корінь*

$\tilde{x}_j \in (x_j; x_{j+1})$, *розташований на числовій прямій між коренями* $P(x)$. Справді, при диференціюванні степеневої функції її степінь зменшується на 1, тому $P'(x)$ — многочлен степеня $n-1$. На кожному з відрізків $[x_j; x_{j+1}]$ многочлен $P(x)$ знакосталий у внутрішніх точках цього відрізка, а на його кінцях дорівнює 0. Згідно з теоремою Ролля, існують такі $\tilde{x}_j \in (x_j; x_{j+1})$, при яких $P'(\tilde{x}_j) = 0$. Многочлен $P'(x)$ ділиться на лінійні многочлени $(x - \tilde{x}_j)$, що є взаємно простими, тому він ділиться на їхній добуток, який є многочленом $(n-1)$-ого степеня. Інших коренів многочлен $P'(x)$ не має.

$$1 - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - \frac{C_n^3}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Щоб довести це, розглянемо таку функцію:

$$f(x) = x - \frac{C_n^1}{2}x^2 + \frac{C_n^2}{3}x^3 - \frac{C_n^3}{4}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}x^{n+1},$$

де $f(0) = 0$. Маємо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n = \\ &= (1-x)^n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)'. \end{aligned}$$

Якщо похідна функції тотожно дорівнює нулю, то вона стала (див. теорему Лаґранжа). Якщо ця ж функція в одній точці дорівнює нулю, то вона тотожно дорівнює нулю. Все це стосується такої функції:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} - f(x).$$

Таким чином, маємо:

$$f(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1},$$

звідси отримаємо: $f(1) = 1/(n+1)$.

## 10.6. Границя відношення функцій і похідні

**Теорема 101 (правила Лопіталя).**[1] *Якщо границі значень функцій одночасно дорівнюють нулю або нескінченності, то границя відношення цих функцій дорівнює границі відношення відповідних похідних за умови, що остання існує:*

$$\begin{cases} \forall\ x \in (a;b) \quad \exists\ f'(x) \\ \forall\ x \in (a;b) \quad \exists\ g'(x) \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} c = a \\ c = b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty \end{array}\right. \\ \lim\limits_{x\to c} f'(x)/g'(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

*де* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

**Доведення**

1. Нехай $b$ — дійсне число, границі $f(x)$ і $g(x)$ при прямуванні $x$ до $b$ дорівнюють нулю, а границя відношення похідних $f'(x)/g'(x)$ для $x \to b$ існує і дорівнює $L$:

$$b < +\infty \ \wedge \ \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

   Доозначимо (за неперервністю) $f(b) = g(b) = 0$. Згідно з теоремою Лаґранжа, для довільного $x \in (a;b)$ існує таке $z \in (x;b)$, при якому:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

   З нерівностей $x < z < b$ випливає істинність імплікації $x \to b \Rightarrow z \to b$ і твердження теореми. Аналогічно розглядають випадок скінченного $a$ та нульових значень границь функцій.

---

[1] Ґійом Франсуа де Лопіталь (1661–1704) — автор першого підручника диференціального числення (1696), в якому дане твердження було сформульоване в менш загальній формі.

2. Нехай границі $f(x)$ і $g(x)$ при прямуванні $x$ до $+\infty$ дорівнюють нулю, а границя відношення похідних $f'(x)/g'(x)$ для $x \to +\infty$ існує і дорівнює $L$. Розглянемо для $x \to 0+0$ і $1/x \to +\infty$ такі функції:

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right); \qquad F'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right); \qquad G'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot g'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Тоді матимемо:

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} \underset{x\to 0+0}{\longrightarrow} = L.$$

За доведеним раніше існують такі границі:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Аналогічно розглядають випадок $x \to -\infty$ та нульових значень границь функцій.

3. Нехай границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при прямуванні $x$ до $b$ дорівнюють $\infty$, а границя відношення похідних $f'(x)/g'(x)$ для $x \to b$ існує та дорівнює $L$:

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \infty \ \wedge \ \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Ми не відкидаємо можливості того, що $b = +\infty$.

Нехай $a < y < x < b$. За теоремою Коші існує таке дійсне $z$ між $y$ та $x$, при якому:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Водночас маємо:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \cdot \frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)}.$$

Для $y$ з достатньо малого околу $b < +\infty$ (достатньо великого $y$ для $b = +\infty$) перший співмножник отриманого виразу як завгодно близький до $L$. Для сталого $y$ і для $x$ з достатньо малого околу $b < +\infty$ (достатньо великого $x$ для $b = +\infty$) другий співмножник як завгодно близький до 1, а весь добуток як завгодно близький до $L$. Випадок, коли аргумент $x$ прямує до лівої межі інтервалу визначення функцій, розглядають аналогічно.

Подамо приклади застосування правила Лопіталя (інколи багатократного).

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln^\alpha x-\left(\frac{x}{e}\right)^\beta}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e},$$

бо

$$\frac{\left(\ln^\alpha x-\left(\frac{x}{e}\right)^\beta\right)'}{(x-e)'}=\alpha\cdot\ln^{\alpha-1}x\cdot\frac{1}{x}-\beta\cdot\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{e}\underset{x\to e}{\longrightarrow}\frac{\alpha-\beta}{e}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^\alpha-1}{\ln x}=\frac{2\alpha}{\pi},$$

бо

$$\frac{\left(\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^\alpha-1\right)'}{(\ln x)'}=\alpha\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{\alpha-1}\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}:\frac{1}{x}\underset{x\to 1}{\longrightarrow}\frac{2\alpha}{\pi}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{\sin^2 x}=\frac{\alpha}{2},$$

бо

$$\frac{(1-\cos^\alpha x)'}{(\sin^2 x)'}=\frac{\alpha\cos^{\alpha-1}x\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{\alpha\cos^{\alpha-2}x}{2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{\alpha}{2}.$$

*Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо:*

$$\frac{(\ln x)'}{(x^{-\varepsilon})'}=\frac{1}{x\cdot(-\varepsilon)x^{-\varepsilon-1}}=-\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}\underset{x\to 0+0}{\longrightarrow}=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0+0}x^\varepsilon\ln x=0.$$

*Для довільного $p > 0$ маємо:*

$$\frac{(\ln x)'}{(x^p)'}=\frac{1}{px^p}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=-\frac{e}{2},$$

бо

$$\frac{((1+x)^{1/x}-e)'}{(x)'}=\left(e^{x^{-1}\ln(1+x)}\right)'=e^{x^{-1}\ln(1+x)}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2},$$

де $e^{x^{-1}\ln(1+x)}=(1+x)^{1/x}\to e$ за умови, що $x\to 0$. У результаті отримаємо:

$$\frac{\left(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right)'}{(x^2)'}=\frac{\left(1-\frac{1}{1+x}-\ln(1+x)\right)'}{2x}=$$

$$=\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=-\frac{1}{2(1+x)^2}\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{1}{2}.$$

*Для довільних $p>0$, $a>1$ маємо:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0. \tag{127}$$

Виберемо $m=[p+1]$. Тоді для $x>1$ матимемо:

$$0<\frac{x^p}{a^x}<\frac{x^m}{a^x}. \tag{128}$$

$$\frac{(x^m)'}{(a^x)'}=\frac{m}{\ln a}\cdot\frac{x^{m-1}}{a^x},\quad\cdots\quad,\quad\frac{(x^m)^{(m)}}{(a^x)^{(m)}}=\frac{m!}{\ln^m a}\cdot\frac{1}{a^x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^m)^{(m)}}{(a^x)^{(m)}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^m)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=0.$$

Врахувавши нерівність (128), отримаємо рівність (127).

*Для таких довільних $z_j>0$ і довільних $\alpha_j\ge 0$, при яких:*

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1,$$

*справджується рівність:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j^x\right)^{1/x} = \prod_{j=1}^{n} z_j^{\alpha_j}.$$

Справді, матимемо:

$$\ln\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j^x\right)^{1/x}\right) = \frac{\ln\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j z_j^x\right)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln\left(\prod_{j=1}^{n} z_j^{\alpha_j}\right),$$

бо

$$\frac{\left(\ln\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j z_j^x\right)\right)'}{(x)'} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j z_j^x \ln z_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j z_j^x},$$

що за умови $x \to 0$ збігається до числа:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \ln z_j = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} z_j^{\alpha_j}\right).$$

Для завершення доведення достатньо використати неперервність показникової функції $e^x$.

## 10.7. Розкладення функції в ряд

**Теорема 102 (формула Тейлора).**[1] *Нехай $f$ — $(n+1)$ разів диференційовна на $(a;b)$ функція. Для довільних $x, x_0 \in (a;b)$ існує таке $\theta \in (0;1)$, при якому:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{129}$$

[1] Брук Тейлор (1685–1731) — англійський математик.

**Доведення.** Для $x = x_0$ рівність очевидна. Для сталого $x \neq x_0$ розглянемо функцію аргументу $z$:

$$u(z) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(z)}{j!}(x-z)^j - \frac{L}{(n+1)!}(x-z)^{n+1} =$$
$$= f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \cdots -$$
$$-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{L}{(n+1)!}(x-z)^{n+1},$$

де $L$ — певна стала, значення якої виберемо так, щоб $u(x_0) = 0$. Зауважимо, що $u(x) = 0$. Згідно з теоремою Ролля, існує таке $z_0$ з інтервалу між $x_0$ та $x$, при якому:

$$u'(z_0) = -f'(z_0) - \frac{f''(z_0)}{1!}(x-z_0) + \frac{f'(z_0)}{0!} -$$
$$-\frac{f'''(z_0)}{2!}(x-z_0)^2 + \frac{f''(z_0)}{1!}(x-z_0) + \cdots -$$
$$-\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{n!}(x-z_0)^n + \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!}(x-z_0)^{n-1} + \frac{L}{n!}(x-z_0)^n =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{n!}(x-z_0)^n + \frac{L}{n!}(x-z_0)^n = 0 \;\Rightarrow\; L = f^{(n+1)}(z_0).$$

Виберемо:

$$\theta = \frac{z_0 - x_0}{x - x_0}.$$

Рівність (129) випливає з рівності $u(x_0) = 0$.

**Зауваження 43.** *Варті уваги такі твердження:*

1. *Для $n = 0$ формула Тейлора перетворюється на формулу скінченних приростів теореми Лаґранжа.*

2. *Формулу Тейлора для $x_0 = 0$ часто називають також формулою Маклорена*[1].

[1] Колін Маклорен (1698–1746) — шотландський математик, учень Ньютона.

3. *Останній доданок у правій частині рівності (129) називають залишковим членом формули Тейлора у формі Лаґранжа. Якщо він прямує до нуля при прямуванні порядку похідної до нескінченності ($n \to +\infty$), то значення функції можна подати таким степеневим рядом:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j. \tag{130}$$

*Для цього достатньо, щоб існувала стала, яка обмежує зверху абсолютні величини похідних функції всіх порядків для аргументів, що лежать у межах від $x_0$ до $x$:*

$$\exists\, a > 0 \quad \forall\, t \in (0;1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x_0 + (x - x_0)t)| < a. \tag{131}$$

*Тоді у розкладенні (129) абсолютна величина останнього доданка обмежена зверху числом $a|x-x_0|^{n+1}/(n+1)!$, що збігається до 0 за умови $n \to +\infty$. Справді, для $x$, відмінного від $x_0$, маємо:*

$$\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x - x_0|^n}{n!} = \frac{|x - x_0|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

*і всі члени послідовності $\{|x - x_0|^n/n!\}_{n \in \mathbb{N}}$ можна обмежити зверху членами спадної геометричної прогресії з як завгодно малим за абсолютною величиною знаменником.*

*Здійснивши граничний перехід $n \to +\infty$ у рівності (129), отримаємо рівність (130). Якщо вибрати $x_0 = 0$, то одержимо такі розкладення:*

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots;\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots;\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots;\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots;
\end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots,$$

*де три перших розкладення справджуються для всіх дійсних $x$, а два останніх — для $x\in(-1;1]$. Насправді умова (131) для $x_0=0$ і $f(x)=\ln(1+x)$ справджується лише для $x\in[0;1)$. Однак для $x\in(-1;1)$ відношення кожного наступного члена ряду до попереднього прямує до $x$, що за абсолютною величиною менше, ніж 1. Тому члени ряду можна мажорувати — обмежити зверху за абсолютною величиною — членами спадної геометричної прогресії зі знаменником $q\in(|x|;1)$. Збіжність ряду для $x=1$ випливає з таких нерівностей:*

$$0<\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2(n-2)}-\frac{1}{2n},$$

*що справджуються для всіх $n>2$. Аналогічно досліджують збіжність останнього розкладення.*

## 10.8. Подання числа $\pi$ сумою ряду

**Лема 9.** $y^{(n)}=(n-1)!\ \cos^n y\ \sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$.

**Доведення** (методом математичної індукції). Твердження леми справджується для $n=1$:

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=(1-1)!\ \cos y\ \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Якщо твердження леми справджується для певного натурального $n$, то $y^{(n+1)}$ дорівнює:

$$\begin{aligned}
&\left((n-1)!\ \cos^n y\ \sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)' =\\
=\ & y'\ \frac{d}{dy}\left((n-1)!\ \cos^n y\ \sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right) =\\
=\ & (n-1)!\ \cos^2 y\ \left(-n\cos^{n-1} y\ \sin y\ \sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +n\cos^n y\ \cos n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\Big)\ = \\
=\ & n!\ \cos^{n+1} y\ \left(\cos y\ \cos n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\sin y\ \sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)= \\
=\ & n!\ \cos^{n+1} y\ \cos\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+y\right)\ = \\
=\ & n!\ \cos^{n+1} y\ \cos\left((n+1)y+\frac{n\pi}{2}\right)\ = \\
=\ & ((n+1)-1)!\ \cos^{n+1} y\ \sin\left((n+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Таким чином, твердження леми справджується і для наступного натурального числа $n+1$.

Маємо: $\cos 0 = 1$; $\sin k\pi/2 = 0$, якщо $k \overset{2}{\equiv} 0$; $\sin k\pi/2 = 1$, якщо $k \overset{4}{\equiv} 1$; $\sin k\pi/2 = -1$, якщо $k \overset{4}{\equiv} 3$.

Таким чином, для довільного $x \in [-1;1]$ збігається такий ряд:

$$
\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots,
$$

звідси отримаємо:

$$
\begin{aligned}
\pi\ &=\ 4\operatorname{arctg} 1\ =\ 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right)\ = \\
&=\ 6\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\ =\ 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right)\ = \\
&=\ 3,141\,592\,653\,589\,793\ \ldots\ .
\end{aligned}
$$

## 10.9. Умови монотонності функції

**Теорема 103 (необхідні умови монотонності).** *Якщо функція, що не спадає (не зростає) на інтервалі, диференційовна у кожній точці цього інтервалу, то її похідна невід'ємна (відповідно недодатна) на цьому інтервалі:*

$$
\begin{gathered}
\forall\ x_1, x_2 \in (a;b)\ x_1 < x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2) \\
\Downarrow \\
\forall\ x \in (a;b)\ \exists\ f'(x) \Rightarrow f'(x) \ge 0;
\end{gathered}
$$

$$\forall\ x_1, x_2 \in (a;b)\ x_1 < x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall\ x \in (a;b)\ \exists\ f'(x) \Rightarrow f'(x) \leq 0,$$

*де* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

**Доведення.** Твердження теореми — наслідок означення похідної та монотонності функції.

**Теорема 104 (достатні умови нестрогої монотонності).** *Якщо похідна функції у кожній точці інтервалу існує і невід'ємна (недодатна), то функція не спадає (відповідно не зростає) на цьому інтервалі:*

$$\forall\ x \in (a;b) \quad f'(x) \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall\ x_1, x_2 \in (a;b) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

$$\forall\ x \in (a;b) \quad f'(x) \leq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall\ x_1, x_2 \in (a;b) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

*де* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

**Доведення.** Якщо $x_1,\ x_2 \in (a;b)$ і $x_1 < x_2$, то, згідно з теоремою Лаґранжа, існує таке $c$ між $x_1$ та $x_2$, при якому:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)\ \Leftrightarrow\ f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1),$$

звідси й випливає твердження теореми.

**Теорема 105 (достатні умови строгої монотонності).** *Якщо похідна неперервної на проміжку функції $f$ у кожній внутрішній точці цього проміжку існує, є невід'ємною (недодатною) і нема підінтервалу, на якому вона (похідна) тотожно дорівнює* $0$, *то функція $f$ строго зростає (відповідно спадає) на цьому проміжку.*

**Доведення.** Згідно з попередньою теоремою, функція $f$, похідна якої невід'ємна (недодатна), не спадає (не зростає). Доведемо від супротивного, що з умови даної теореми випливає строга монотонність такої функції. Якщо існують такі $c < d$ з проміжку нестрогої монотонності $f(x)$, при яких $f(c) = f(d)$, то $f(x)$ стала на $[c; d]$. У даному разі $f'(x) = 0$ на $(c; d)$, що суперечить умові теореми.

Розглянемо кілька прикладів застосування доведених теорем.

***Функція*** $y(x) = x - \sin x$ *монотонно зростає,* бо її похідна

$$y'(x) = 1 - \cos x \quad —$$

додатна для всіх дійсних $x$, за винятком $x = 2k\pi$, де $k$ — ціле.

***Функція***

$$y(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

*зростає на кожному з інтервалів* $(-\infty; -1)$ *та* $(0; +\infty)$*, але не зростає на їхньому об'єднанні.* Справді, маємо:

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right).$$

На кожному із вказаних інтервалів перший співмножник додатний, а в другому співмножнику

$$\frac{1}{x} > -1 \;\Rightarrow\; \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1/x}{1 + 1/x} = \frac{1}{1+x}$$

(див. нерівність (125)). При цьому $(e; +\infty)$ та $(1; e)$ — області значень функції відповідно на $(-\infty; -1)$ і $(0; +\infty)$.

*Для додатних* $a \neq b$ ***функція***

$$y(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} = \left(\left(1 + \frac{a-b}{b+x}\right)^{(b+x)/(a-b)}\right)^{a-b}$$

*зростає на* $(0; +\infty)$, бо є суперпозицією таких монотонних функцій:

$$y_1(x) = \frac{b+x}{a-b}; \qquad y_2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \qquad y_3(x) = x^{a-b},$$

де $y_1(x)$ та $y_3(x)$ одночасно спадають або зростають залежно від знака різниці $a - b$, а $y_2(x)$ монотонно зростає.

***Функція*** $y(x) = x^{-1}\ln(1+x)$ ***спадає на*** $(0;+\infty)$ ***від*** $1$ ***до*** $0$, бо

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) < 0$$

(див. нерівність (125)).

***Якщо*** $0 < a < b$, ***то функція*** $y(x) = \ln(1+ax)/\ln(1+bx)$ ***зростає на*** $x \in (0;+\infty)$ ***від*** $a/b$ ***до*** $1$.

$$y'(x) = \frac{1}{\ln^2(1+bx)}\cdot\left(\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)\right) =$$

$$= \frac{ab}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)}\cdot g(x),$$

де

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1+bx}{b}\ln(1+bx) - \frac{1+ax}{a}\ln(1+ax), \\ g'(x) &= \ln(1+bx) - \ln(1+ax) > 0 \end{aligned}$$

для $x > 0$. Для додатних $x$ справджується нерівність $g(x) > 0$, бо $g(0) = 0$, а функція $g$ зростає на $[0;+\infty)$. Отже, $y'(x) > 0$ для додатних $x$.

***Нехай*** $y(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$. ***Тоді маємо:***

$$\alpha \in (-\infty;+\infty)\backslash[0;1] \ \wedge\ x \in (0;+\infty)\backslash\{1\} \ \Rightarrow\ y(x) > 0; \qquad (132)$$

$$\alpha \in (0;1) \ \wedge\ x \in (0;+\infty)\backslash\{1\} \ \Rightarrow\ y(x) < 0. \qquad (133)$$

Зауважимо, що $y(1) = 0$. Дослідивши знак $y'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$, маємо:

- за умов, записаних у (132) ліворуч, функція $y$ спадає на $(0;1]$ і зростає на $[1;+\infty)$;
- за умов, записаних у (133) ліворуч, функція $y$ зростає на $(0;1]$ і спадає на $[1;+\infty)$.

## 10.10. Найбільше й найменше значення функції

Питання про необхідні умови існування локального максимуму (мінімуму) диференційовної функції вичерпно описано в теоремі Ферма.

**Теорема 106 (достатня умова існування екстремуму).** *Нехай функція $f$ неперервна на проміжку, диференційовна у кожній його внутрішній точці, можливо, за винятком внутрішньої точки $x_0$ цього проміжку. Якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з $+$ на $-$ (з $-$ на $+$) при зростанні аргументу $x \neq x_0$ і переході через значення $x_0$, то $f(x)$ в $x_0$ має локальний максимум (мінімум), тобто:*

$$\exists\ \varepsilon > 0 \begin{cases} \forall\ x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)\ f'(x) > 0 \\ \forall\ x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)\ f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = \max_{x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)} f(x);$$

$$\exists\ \varepsilon > 0 \begin{cases} \forall\ x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)\ f'(x) < 0 \\ \forall\ x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)\ f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = \min_{x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)} f(x).$$

**Доведення.** З теореми 105 про достатні умови строгої монотонності випливає, що існує $\varepsilon$-окіл $x_0$, який поділяється точкою $x_0$ на інтервали зростання і спадання (або навпаки) функції $f(x)$, що в цій точці набирає найбільшого (найменшого) значення.

Наприклад, для $f(x) = |x|$ найменше значення функції досягається у точці $x_0 = 0$.

**Зауваження 44.** *Достатньою умовою справдження умов теореми 106 є рівність $f'(x_0) = 0$ та знакосталість $f''(x) \neq 0$ — другої похідної — в околі $x_0$:*

- *якщо $f''(x) < 0$ у цьому околі, то в $x_0$ функція $f$ має локальний максимум;*
- *якщо $f''(x) > 0$ у цьому околі, то в $x_0$ функція $f$ має локальний мінімум.*

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку можна використати подане нижче твердження.

**Теорема 107.** *Якщо найбільше чи найменше значення на відрізку $[a; b]$, що належить до області визначення функції $f(x)$ як підмножина, досягається функцією $f(x)$ у точці $x_0$, то $x_0$ — один з кінців відрізка або $f'(x_0) = 0$, або похідна функції $f(x)$ у точці $x_0$ не визначена.*

**Доведення.** Для строго монотонної функції найбільше та найменше значення досягаються на кінцях відрізка. Якщо ж це значення досягається у точці інтервалу $(a; b)$, в якій визначена похідна $f'(x)$, то за теоремою Ферма вона дорівнює нулю.

## 10.11. Опуклість функції і друга похідна

**Теорема 108 (достатня умова опуклості).** *Якщо $f''(x)$ — друга похідна функції $f(x)$ — додатна (від'ємна) на інтервалі $(a;b)$, то $f(x)$ строго опукла вниз (вгору) на цьому інтервалі.*

**Доведення.** Нехай $x_1 < x_2$ — довільні точки інтервалу $(a;b)$. Зауважимо, що

$$x_1 - \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_1-x_2}{2}; \qquad x_2 - \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_2-x_1}{2}.$$

Згідно з теоремою 102, існують такі:

$$c_1 \in \left(x_1; \frac{x_1+x_2}{2}\right); \qquad c_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}; x_2\right),$$

при яких:

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \frac{x_2-x_1}{2} + \frac{f''(c_1)}{2!} \cdot \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2;$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \frac{x_2-x_1}{2} + \frac{f''(c_2)}{2!} \cdot \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2$$

(див. формулу Тейлора для $n = 1$, де вибрано $x_0 = (x_1+x_2)/2$). Додавши ліві та праві частини отриманих рівностей, отримаємо:

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{f''(c_1)+f''(c_2)}{8} \cdot (x_2-x_1)^2.$$

У результаті матимемо:

$$\begin{cases} f''(c_1) > 0 \\ f''(c_2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right);$$

$$\begin{cases} f''(c_1) < 0 \\ f''(c_2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

що й потрібно було довести.

**Наслідок 27.** *Якщо друга похідна функції f, неперервної на відрізку $[a;b]$, додатна (від'ємна) на інтервалі $(a;b)$, то f строго опукла вниз (вгору) на відрізку $[a;b]$.*

Доведення цього твердження відтворює попередні міркування, за винятком того, що $x_1 < x_2$ — довільні точки *відрізка* $[a; b]$.

Безпосереднім наслідком теореми 108 є подана нижче *достатня умова існування точки перегину.*

**Теорема 109.** *Нехай функція $f$ неперервна на проміжку, двічі диференційовна у кожній його внутрішній точці, можливо, за винятком внутрішньої точки $x_0$ цього проміжку. Якщо існує таке додатне $\varepsilon$, при якому друга похідна $f''(x)$ змінює знак з $+$ на $-$ (з $-$ на $+$) при зростанні аргументу $x \neq x_0$ і переході через значення $x_0$:*

$$\begin{cases} \forall\ x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) & f''(x) > 0 \\ \forall\ x \in (x_0; x_0 + \varepsilon) & f''(x) < 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} \forall\ x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) & f''(x) < 0 \\ \forall\ x \in (x_0; x_0 + \varepsilon) & f''(x) > 0 \end{cases},$$

*то $x_0$ — точка перегину функції $f$.*

## 10.12. Приклади дослідження функцій

**Задача 22.** *Дослідити функцію $y(x) = x^3 e^{-x^2}$, побудувати її графік.*

1. Область визначення — $(-\infty; +\infty)$.

2. Функція неперервна на області визначення.

3. Функція непарна — $(-x)^3 e^{-(-x)^2} = -x^3 e^{-x^2}$.

4. Функція неперіодична (див. проміжки монотонності).

5. $y'(x) = 3x^2 e^{-x^2} - x^3 e^{-x^2} \cdot 2x = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$ змінює знак:

   - з $-$ на $+$ у точці $-\sqrt{3/2}$;
   - з $+$ на $-$ у точці $+\sqrt{3/2}$.

   Використовуючи правила Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{4xe^{x^2}} = 0.$$

   Отже, дана функція:

- спадає на $(-\infty; -\sqrt{3/2}]$ від 0 до $-(3/2e)^{3/2} \approx -0,36$;
- зростає на $[-\sqrt{3/2}; \sqrt{3/2}]$ від $-(3/2e)^{3/2}$ до $(3/2e)^{3/2}$;
- спадає на $[\sqrt{3/2}; +\infty)$ від $(3/2e)^{3/2}$ до 0.

6. $[-(3/2e)^{3/2}; (3/2e)^{3/2}]$ — область значень функції.

7. $y''(x) = (6x - 8x^3)e^{-x^2} - 2x(3x^2 - 2x^4)e^{-x^2} =$
   $= (4x^5 - 14x^3 + 6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 1)(x^2 - 3)e^{-x^2}$
   змінює знак:

   - з $-$ на $+$ у точках $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$;
   - з $+$ на $-$ у точках $-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$,

   що є точками перегину. Таким чином, дана функція:

   - опукла вгору на $(-\infty; -\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{2}; 0]$ і $[1/\sqrt{2}; \sqrt{3}]$;
   - опукла вниз на $[-\sqrt{3}; -1/\sqrt{2}]$, $[0; 1/\sqrt{2}]$ і $[\sqrt{3}; +\infty)$.

8. Графік функції перетинає осі координат у початку координат.

9. Графік має горизонтальну асимптоту $\{y = 0\}$ (див. рис. 72).

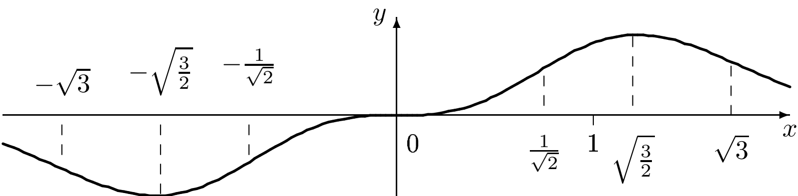



*Рис. 72.* Графік функції $y = x^3 e^{-x^2}$.

**Задача 23.** *Дослідити функцію* $y(x) = \ln x + 2/x$ *і побудувати її графік.*

1. Область визначення — $(0; +\infty)$.

2. Функція неперервна на області визначення.

3. Функція ні парна, ні непарна, бо область визначення не симетрична відносно нуля.

4. Функція неперіодична, бо область визначення не зберігається при зсувах.

5. $y'$ змінює знак з $-$ на $+$ у точці 2, що є точкою локального і глобального мінімуму, бо

$$y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}.$$

Водночас маємо:

$$\lim_{x\to 0+0} \left(\ln x + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x\ln x + 2}{x} = +\infty \Leftarrow \lim_{x\to 0+0} x\ln x = 0.$$

Отже, дана функція:

- спадає на (0;2] від $+\infty$ до $y(2) = \ln 2 + 1 \approx 1,7$;
- зростає на $[2;+\infty]$ від $\ln 2 + 1$ до $+\infty$.

6. $[\ln 2 + 1; +\infty)$ — область значень функції.

7. $y''$ змінює знак з $-$ на $+$ у точці $x = 4$, що є точкою перегину, бо

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4-x}{x^3}.$$

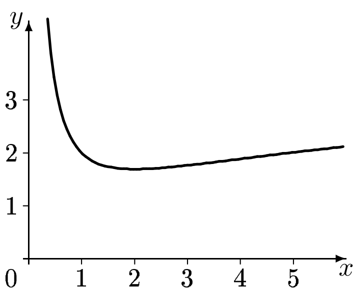



*Рис. 73.* Графік функції $y = \ln x + 2/x$.

Отже, дана функція:

- опукла вниз на (0;4];
- опукла вгору на $[4; -\infty)$.

8. Графік функції не перетинає осі координат.

9. Графік має лише вертикальну асимптоту $\{x = 0\}$ (див. рис. 73).

**Задача 24.** *Дослідити функцію* $y(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ *і побудувати її графік.*

1. $(-\infty; +\infty)$ — область визначення.

2. Функція неперервна на області визначення.

3. Функція непарна як сума непарних.

4. Період функції $2\pi$. Надалі доданок $2k\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$, вказуватиме саме на це.

5. $y'(x) = \cos x + \cos 3x = 2\cos x \cos 2x$ змінює знак (див. рис. 74):

   - з $-$ на $+$ у точках $-3\pi/4 + 2k\pi$, $-\pi/4 + 2k\pi$, $\pi/2 + 2k\pi$, що є точками локальних мінімумів;
   - з $+$ на $-$ у точках $-\pi/2 + 2k\pi$, $\pi/4 + 2k\pi$, $3\pi/4 + 2k\pi$, що є точками локальних максимумів.

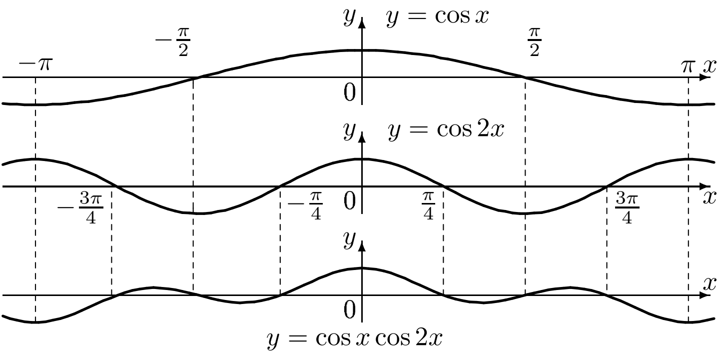



*Рис. 74.* Дослідження знака $y'(x) = 2\cos x \cos 2x$.

Функція $y(x)$:

- зростає на $[-3\pi/4+2k\pi;-\pi/2+2k\pi]$ від $-2\sqrt{2}/3$ до $-2/3$;
- спадає на $[-\pi/2+2k\pi;-\pi/4+2k\pi]$ від $-2/3$ до $-2\sqrt{2}/3$;
- зростає на $[-\pi/4+2k\pi;\pi/4+2k\pi]$ від $-2\sqrt{2}/3$ до $2\sqrt{2}/3$;
- спадає на $[\pi/4+2k\pi;\pi/2+2k\pi]$ від $2\sqrt{2}/3$ до $2/3$;
- зростає на $[\pi/2+2k\pi;3\pi/4+2k\pi]$ від $2\sqrt{2}/3$ до $2\sqrt{2}/3$;
- спадає на $[3\pi/4+2k\pi;5\pi/4+2k\pi]$ від $2\sqrt{2}/3$ до $-2\sqrt{2}/3$.

6. $[-2\sqrt{2}/3;2\sqrt{2}/3]$ — область значень функції.

7. Враховуючи, що

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(x+2x) = \sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x =\\ = \sin x(1-2\sin^2 x)+2\sin x(1-\sin^2 x) =\\ = \sin x(3-4\sin^2 x),\end{aligned}$$

маємо:

$$\begin{aligned}y''(x) = -\sin x-3\sin 3x = -\sin x-3(3\sin x-4\sin^3 x) =\\ = 12\sin^3 x-10\sin x = 2\sin x(6\sin^2 x-5).\end{aligned}$$

Позначимо $\varphi = \arcsin\sqrt{5/6}$. Тоді $y''(x)$ змінює знак у точках перегину (див. рис .75):

- з $-$ на $+$ у точках $-\pi+2k\pi$, $-\varphi+2k\pi$, $\varphi+2k\pi$;
- з $+$ на $-$ у точках $\varphi-\pi+2k\pi$, $2k\pi$, $\pi-\varphi+2k\pi$.

Отже, дана функція:

- на $[-\pi+2k\pi;\varphi-\pi+2k\pi]$ опукла вниз;
- на $[\varphi-\pi+2k\pi;-\varphi+2k\pi]$ опукла вгору;
- на $[-\varphi+2k\pi;2k\pi]$ опукла вниз;
- на $[2k\pi;\varphi+2k\pi]$ опукла вгору;
- на $[\varphi+2k\pi;\pi-\varphi+2k\pi]$ опукла вниз;
- на $[\pi-\varphi+2k\pi;\pi+2k\pi]$ опукла вгору.

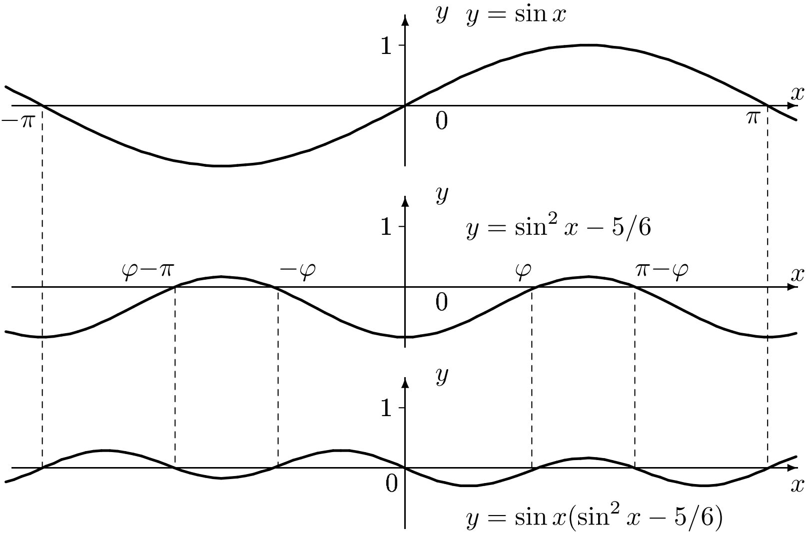



*Рис. 75.* Дослідження знаку $y''(x) = 2\sin x(6\sin^2 x - 5)$.

8. Справджуються такі рівності:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin x + \frac{\sin 3x}{3} = \sin x + \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{3} = \\ &= 2\sin x\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2 x\right). \end{aligned}$$

Таким чином, графік функції перетинає вісь абсцис у точках $(k\pi; 0)$.

9. Графік не має асимптот (див. рис. 76).

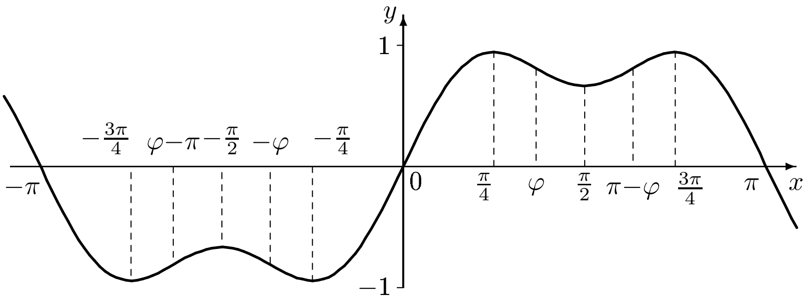



*Рис. 76.* Графік функції $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

**Задача 25.** *Дослідити функцію* $y(x) = (x-3)^3(x-2)^{-2}$ *і побудувати її графік.*

1. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ — область визначення.

2. Функція неперервна на області визначення.

3. Функція ні парна, ні непарна, бо область визначення не зберігається при симетрії відносно нуля.

4. Функція неперіодична, бо область визначення не зберігається при зсувах.

5. $y'(x) = (x-3)^2(x-2)^{-3}(3(x-2) - 2(x-3)) =$
   $= x(x-3)^2(x-2)^{-3}$ змінює знак:

   - з + на − в 0, що є точкою локального максимуму;
   - з − на + в околі 2, що не належить області визначення.

6. Функція $y(x)$:

   - зростає на $(-\infty; 0]$ від $-\infty$ до $-27/4 = -6,25$;
   - спадає на [0;2) з $-27/4$ до $-\infty$;
   - зростає на $(2; +\infty)$ від $-\infty$ до $+\infty$.

7. $(-\infty; +\infty)$ — область значень функції.

8. $y''(x) = (x-3)(x-2)^{-4}((x-3)(x-2) + 2x(x-2) - 3x(x-3)) =$
$= 6(x-3)(x-2)^{-4}$ змінює знак з $-$ на $+$ у точці 3, що є точкою перегину. Функція $y(x)$:

- на $(-\infty; 2)$ і на (2;3] опукла вгору;
- на $[3; +\infty)$ опукла вниз.

9. Графік функції перетинає вісь абсцис у точці (3;0), вісь ординат — у $(0; -27/4)$.

10. $y(x) = ((x-2)-1)^3(x-2)^2 =$
$= ((x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 3(x-2) - 1)(x-2)^{-2} =$
$= x - 5 + 3(x-2)^{-1} - (x-2)^{-2}$,
де останні два доданки прямують до 0 за умови, що $x \to \infty$. Графік функції має асимптоти $\{x = 3\}$ і $\{y = x - 5\}$ (див. рис. 77).

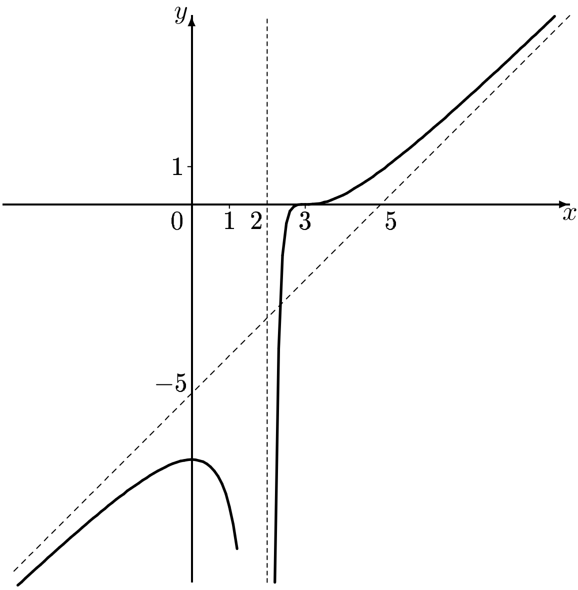



*Рис. 77.* Графік функції $y = (x-3)^3(x-2)^{-2}$.

Задачі про кількість коренів нелінійних рівнянь розв'язують таким чином: отримують еквівалентне початковому рівняння вигляду $f(x) = const$ і знаходять кількість точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямою $y = const$. Для цього проводиться дослідження $f(x)$ щодо неперервності та проміжків монотонності.

**Задача 26.** *Знайти кількість дійсних коренів рівняння*

$$\ln x = ax.$$

**Розв'язання.** Розглянемо еквівалентне рівняння: $x^{-1}\ln x = a$.

Дослідимо $f(x) = x^{-1}\ln x$:

1. $(0; +\infty)$ — область визначення.

2. Функція неперервна на області визначення.

3. $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$ змінює знак з $+$ на $-$ в $e$, що є точкою локального максимуму. Функція $f(x)$ (див. рис. 78):

   - зростає на $(0; e]$ від $-\infty$ до $1/e$;
   - спадає на $[e; +\infty)$ з $1/e$ до 0.

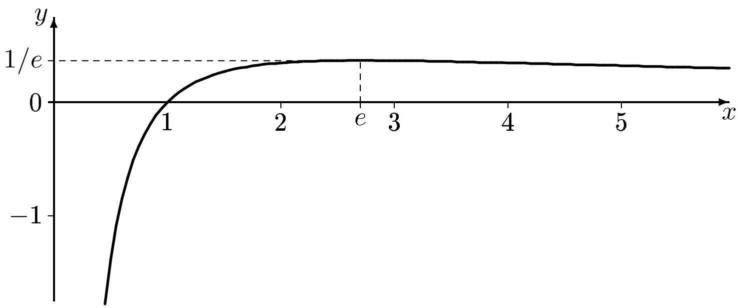



*Рис. 78.* Графік функції $y = x^{-1}\ln x$.

**Відповідь.** Рівняння $\ln x = ax$:

- має єдиний дійсний розв'язок, якщо $a \leq 0$ або $a = 1/e$;

- має два додатних розв'язки, якщо $0 < a < 1/e$;

- не має дійсних розв'язків, якщо $a > 1/e$.

**Задача 27.** *Знайти кількість дійсних коренів рівняння* $a^x = bx$, *якщо* $a > 0$.

**Розв'язання.** Дослідимо функцію $f(x) = a^x/x$. Область визначення функції $f(x)$ задається нерівністю $x \neq 0$. Функція $f(x)$ неперервна на області визначення. Маємо:

$$f'(x) = a^x \cdot \frac{x \ln a - 1}{x^2}.$$

Якщо $a > 1$, то $f'$ змінює знак з $-$ на $+$ у точці $1/\ln a$, що є точкою локального мінімуму. В даному разі (див. рис. 79) функція:

- спадає на $(-\infty; 0)$ від 0 до $-\infty$;
- спадає на $(0; 1/\ln a]$ від $+\infty$ до $e \ln a$;
- зростає на $[1/\ln a; +\infty)$ від $e \ln a$ до $+\infty$.

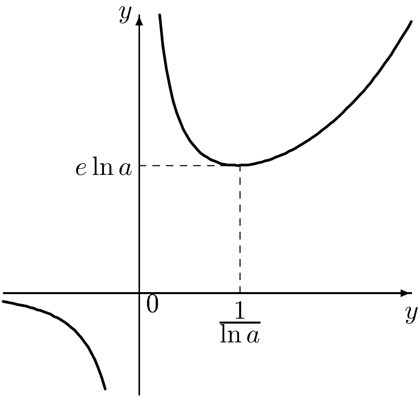



*Рис. 79.* Графік функції $y = a^x/x$ для $a > 1$.

Якщо $0 < a < 1$, то $f'$ змінює знак з $+$ на $-$ у точці $1/\ln a$, що є точкою локального максимуму (див. рис. 80). Функція $f$:

- зростає на $(-\infty; 1/\ln a]$ від $-\infty$ до $e \ln a$;
- спадає на $[1/\ln a; 0)$ від $e \ln a$ до $-\infty$;
- спадає на $(0; +\infty)$ від $+\infty$ до 0.

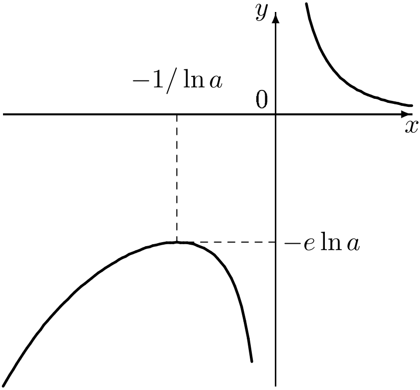



*Рис. 80.* Графік функції $y = a^x/x$ для $a \in (0;1)$.

**Відповідь:**

- якщо $a = 1$, то рівняння:
  - має один дійсний корінь $1/b$, якщо $b \neq 0$;
  - не має дійсних коренів, якщо $b = 0$;
- якщо $a > 1$, то рівняння:
  - має один дійсний корінь, якщо $b < 0$ або $b = e\ln a$;
  - не має дійсних коренів, якщо $0 \le b < e\ln a$;
  - має два додатних корені, розділені числом $1/\ln a$, якщо $b > e\ln a$;
- якщо $0 < a < 1$, то рівняння:
  - має один дійсний корінь, якщо $b > 0$ або $b = e\ln a$;
  - не має дійсних коренів, якщо $0 \ge b > e\ln a$;
  - має два від'ємних корені, розділені числом $1/\ln a$, якщо $b < e\ln a$.

## 10.13. Опуклість оберненої функції

**Теорема 110.** *Нехай $f : (a;b) \to (c;d)$, $\varphi : (c;d) \to (a;b)$ — взаємно обернені строго монотонні двічі диференційовні функції, причому $f$ строго опукла й така, при якій для довільного $x \in (a;b)$ $f'(x) \neq 0$. Тоді маємо:*

- *якщо $f$ спадає, то $f$ та $\varphi$ мають один і той самий напрям опуклості;*
- *якщо $f$ зростає, то $f$ та $\varphi$ мають протилежні напрями опуклості.*

**Доведення.** Для довільного $y \in (c;d)$ виберемо: $x = \varphi(y) \in (a;b)$.

Згідно з правилом диференціювання оберненої функції, маємо:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

Згідно з правилом диференціювання складеної функції, маємо:

$$\begin{aligned}\varphi''(y) &= \frac{d}{dy}\frac{1}{f'(x)} = \frac{dx}{dy}\ \frac{d}{dx}\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x)}\left(-\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}\right) = \\ &= -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}.\end{aligned}$$

Згідно з умовою теореми, отримаємо:

$$\operatorname{sign}\ \varphi''(y) = -\operatorname{sign}\ f'(x) \cdot \operatorname{sign}\ f''(x).$$

Враховуючи зв'язок:

- між характером монотонності і знаком першої похідної;
- між напрямом опуклості та знаком другої похідної,

отримаємо твердження теореми.

# Розділ 11. Інтеграл

У цьому розділі обмежимося розглядом функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

## 11.1. Первісна. Невизначений інтеграл

**Означення 110.** *Функцію $F$ називають первісною функції $f$, визначеної на об'єднанні скінченної кількості проміжків, якщо для будь-якого $x$ з цього об'єднання визначена похідна $F'(x) = f(x)$.*

*Обернену до диференціювання операцію — пошук первісної — називають інтегруванням.*

Первісна має такі властивості:

- неперервна на області визначення, бо диференційовна;
- визначається з точністю до сталих на проміжках, на які розбивається область визначення[1];
- існує не для кожної функції на всій області її визначення.

Доведення потребують лише останні два твердження. Нехай $F(x)$, $G(x)$ — первісні функції $f(x)$, $C$ — стала. Тоді маємо:

$$(F(x) + C)' = F'(x).$$

Таким чином, множина первісних не змінюється (*інваріантна*) відносно операції додавання сталої. Водночас

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

тому, згідно з формулою скінченних приростів (теоремою Лаґранжа), різниця $F(x) - G(x)$ — стала на проміжку з області визначення.

Не існує первісна такої функції:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

[1]Можливо, різних сталих для різних проміжків.

Якби первісна існувала, то для недодатних аргументів $x$ була би сталою, а для додатних $x$ мала би такий вигляд: $x + C$. Враховуючи вимогу неперервності, отримали би функцію:

$$F(x) = \begin{cases} C, & x \le 0, \\ x + C, & x > 0, \end{cases}$$

що не має похідної у точці $x = 0$.

**Означення 111.** *Невизначений інтеграл функції $f$ — множина всіх її первісних, яку позначають так*[1]*: $\int f(x)\,dx$. Функцію $f(x)$ у цьому позначенні називають підінтегральною функцією, вираз $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом. Для позначення аргументу підінтегральної функції можна використовувати будь-яку літеру.*

*Первісну визначають з точністю до сталої, тому надалі множину первісних — невизначений інтеграл — записуватимемо у такому вигляді: $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних.*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \tag{134}$$

де похідну інтеграла розуміємо як похідну одного з його представників.

**Теорема 111.** *Справджуються такі правила інтегрування:*

1. *Первісна суми дорівнює сумі первісних*[2]*:*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{135}$$

2. *Сталий множник можна виносити за знак інтегрування:*

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx. \tag{136}$$

---

[1] Це позначення запровадив Лейбніц, знак інтеграла $\int$ — трансформована літера S (перша літера латинського слова *summa*).

[2] Суму невизначених інтегралів — множин — потрібно розуміти як множину всіх можливих сум відповідних первісних. Аналогічне тлумачення мають інші арифметичні дії з інтегралами. Тут і надалі припускається існування всіх первісних, про які йдеться.

3. *Можна інтегрувати за допомогою підстановки, якщо підінтегральна функція — похідна складеної функції* [1]*:*

$$\int F'(\varphi(x))\ \varphi'(x)\ dx = F(\varphi(x)) + C. \tag{137}$$

4. *Можна інтегрувати за частинами*[2]*:*

$$\int u'(x)\ v(x)\ dx = u(x)\ v(x) - \int u(x)\ v'(x)\ dx. \tag{138}$$

**Доведення** теореми зводиться до порівняння похідних лівих та правих частин рівностей (135–138) після використання тотожності (134) і правил диференціювання.

## 11.2. Первісні елементарних функцій

**Теорема 112.** *Існують такі інтеграли:*

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\ x + C;$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\ x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\ x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\ x + C;$$

$$\int \text{sh}\ x\ dx = \text{ch}\ x + C; \qquad \int \text{ch}\ x\ dx = \text{sh}\ x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\text{cth}\ x + C; \qquad \int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}\ x + C.$$

---

[1] Надалі при інтегруванні методом підстановки для виділення співмножників підінтегральної функції і з метою уникнення необхідності опису того, яка заміна робиться, використаємо такі позначення:
$\int F'(\varphi(x))\ \varphi'(x)\ dx = \int F'(\varphi(x))\ d\varphi(x) = \int dF(\varphi((x)) = F(\varphi((x)) + C.$

[2] Використовується й така форма запису:
$\int v(x)\ du(x) = u(x)\ v(x) - \int u(x)\ dv(x).$

**Доведення** теореми зводиться до порівняння похідних правих та лівих частин рівностей з використанням тотожності (134) і правил диференціювання основних елементарних функцій.

**Зауваження 45.** *Інтегруючи, потрібно враховувати таке:*

1. *Первісна елементарної функції не обов'язково елементарна функція. Наприклад, для довільного натурального* $n$ *первісні функцій* $x^{-n}\sin x$, $x^{-n}\cos x$, $x^{-n}e^x$ *не є елементарними функціями.*

2. *Якщо область визначення підінтегральної функції* $f$ *не є проміжком, то доданок* $C$ *у формулі для невизначеного інтеграла відповідає різним сталим для різних проміжків — підмножин області визначення* $f$. *Наприклад, множина первісних функції* $f(x) = 1/x$ *вичерпується функціями такого вигляду:*

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_-, & x < 0, \\ \ln x \quad + C_+, & x > 0. \end{cases}$$

*Первісною для функції* $f(x) = \cos^{-2} x$ *є функція:*

$$F(x) = \text{tg } x + C_k, \quad \text{де } x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

*а* $\{C_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *— довільна послідовність дійсних чисел.*

## 11.3. Приклади пошуку первісних

Невизначений інтеграл знаходять зведенням за допомогою правил інтегрування шуканого інтеграла до вже знайдених[1]:

$$\begin{aligned} \int \text{tg } x \; dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\int d\ln|\cos x| = \\ &= -\ln|\cos x| + C; \\ \int \text{ctg } x \; dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \int d\ln|\sin x| = \\ &= \ln|\sin x| + C; \end{aligned}$$

[1]Правила знаходження інтегралів та численні результати опубліковано у спеціальній довідковій літературі, наприклад, у такій праці: Прудников А. П., Брычков Ю. А., Марычев О. И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 798 с.

$$\int \left( \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right) dx = \sum_{j=0}^{n} \int a_j x^j \ dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j x^{j+1}}{j+1} + C;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x-1)} &= \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ dx}{\sqrt[3]{x+1}} &= \int \left( \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \right) dx = \\ &= \int (x+1)^{2/3} d(x+1) - \int (x+1)^{-1/3} d(x+1) = \\ &= \frac{3}{5}(x+1)^{5/3} - \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} + C = \\ &= \left( \frac{3}{5}x - \frac{9}{10} \right) (x+1)^{2/3} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \ dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \ dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \ d2x}{4} = \\ &= \frac{x}{2} + \int \frac{d \sin 2x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C; \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}} =$$
$$= \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C;$$

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\ dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

За допомогою інтегрування за частинами знаходять первісні добутків многочленів на $\sin x$ чи $\cos x$. При цьому під знак диференціала вносять тригонометричну функцію. Це роблять для того, щоб зменшувати степінь многочлена у підінтегральному виразі доти, поки він не дорівнюватиме 0. Наприклад:

$$\int x\sin x\ dx = -\int x\ d\cos x = -x\cos x + \int \cos x\ dx =$$
$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Для довільного многочлена $p(x)$ маємо:

$$\int p(x)\ \cos x\ dx = \sin x\ (p(x) - p''(x) + p^{(4)}(x) - \cdots) +$$
$$+ \cos x\ (p'(x) - p'''(x) + p^{(5)}(x) - \cdots) + C;$$
$$\int p(x)\ \sin x\ dx = -\cos x\ (p(x) - p''(x) + p^{(4)}(x) - \cdots) +$$
$$+ \sin x\ (p'(x) - p'''(x) + p^{(5)}(x) - \cdots) + C.$$

Для обчислення $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ за умови, що $r > 0$, використаємо таку заміну змінних: $x(\varphi) = r\sin\varphi$, $\varphi(x) = \arcsin(x/r)$. Тоді маємо:

$$x'(\varphi) = r\cos\varphi = r\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2-x^2};$$

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\ dx = r^2\int\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\ d\left(\frac{x}{r}\right) =$$

$$= r^2\int\sqrt{1-\sin^2\varphi}\ \cos\varphi\ d\varphi = r^2\int\cos^2\varphi\ d\varphi = r^2\int\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\ d\varphi =$$

$$= r^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) + C = \frac{r^2}{2}\cdot\varphi + \frac{r^2}{2}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi + C =$$

$$= \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + C.$$

## 11.4. Визначений інтеграл

**Означення 112.** *Послідовність* $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ — *розбиття відрізка* $[a;b]$, *якщо:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

*Для цього розбиття означимо довжини відрізків розбиття:*

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \qquad \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n = b - a.$$

*Діаметр цього розбиття — довжина найбільшого з відрізків:*

$$\lambda(\{x_j\}) = \max_j \Delta x_j.$$

*Послідовність* $\{\xi\}_{j=1}^{n}$ — *набір внутрішніх точок розбиття* $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ *відрізка* $[a;b]$, *якщо* $\xi_j \in [x_{j-1}; x_j]$ *для всіх* $j = 1,\ 2, \dots, n$, *тобто:*

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \dots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b.$$

*Інтегральною сумою для функції f, визначеної на відрізку* $[a;b]$, *що відповідає розбиттю* $\{x_j\}$ *і набору внутрішніх точок* $\{\xi_j\}$, *називають таку суму:* $\sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$, *яку позначають так:* $S(f, \{x_j\}, \{\xi_j\})$.

*Нехай функція f визначена для кожної точки відрізка* $[a;b]$. *Визначений інтеграл*[1] *функції f на відрізку* $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\lambda(\{x_j\})\to 0} S(f, \{x_j\}, \{\xi_j\}) — \tag{139}$$

*границя відповідних інтегральних сум, якщо вона (границя) існує*[2] *при прямуванні діаметра розбиття до нуля незалежно від вибору внутрішніх точок:*

[1] Позначення запропонував Лейбніц.

[2] Доведення єдиності такої границі аналогічне до доведення теореми 37 про єдиність границі збіжної послідовності дійсних чисел.

$$\int_a^b f(x)\ dx = A$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall \{x_j\}\ \forall\ \{\xi_j\}\ \lambda(\{x_j\}) < \delta \Rightarrow |S(f, \{x_j\}, \{\xi_j\}) - A| < \varepsilon.$$

*У даному разі стверджують, що функція $f$ інтегровна на $[a; b]$ за Ріманом*[1] *(надалі інтегровну функцію розумітимемо як інтегровну за Ріманом), а числа $a$ та $b$ називають відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування. Очевидно, що стала на відрізку функція*[2] *— інтегровна на цьому відрізку.*

*Для довільного дійсного $a$ з області визначення функції $f$ вважатимемо, що*

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

*Для $a > b$ вважатимемо, що*

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx,$$

*якщо $f$ визначена на $[b; a]$ й останній інтеграл існує.*

Для позначення аргументу підінтегральної функції $f$ можна використовувати будь-яку літеру, але відмінну від позначень нижньої та верхньої меж інтегрування, за винятком випадку, коли на відрізку інтегрування підінтегральна функція стала й дорівнює значенню функції в одній з меж інтегрування.

**Зауваження 46.** *Для інтегровності функції $f$ на відрізку $[a; b]$ необхідно (хоча недостатньо — див. далі критерій інтегровності), щоб функція $f$ була обмеженою на цьому відрізку:*

$$\exists \int_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \exists\ A \in \mathbb{R}\quad \forall\ x \in [a; b]\quad |f(x)| < A.$$

---

[1] Георг Фрідріх Бернхард Ріман (1826–1866) — німецький математик. Запровадив строге означення визначеного інтеграла, довів його існування. Автор геометричного підходу до теорії функцій комплексної змінної, заклав початки топології, розвинув ідеї диференціальної геометрії та аналітичної теорії чисел.

[2] Множина значень цієї функції на відрізку — одноелементна множина.

**Доведення** (від супротивного). Припустимо, що функція $f$ необмежена на відрізку $[a;b]$, тобто існує така послідовність $\{y_n\}$ точок відрізка $[a;b]$, при якій $f(y_n) \to \infty$, якщо $n \to +\infty$. З інтегровності $f$ на $[a;b]$ випливає, що

$$\exists\, \delta > 0\, \forall \{x_j\}\, \forall\, \{\xi_j\}\; \lambda(\{x_j\}) < \delta \;\Rightarrow \left| S(f, \{x_j\}, \{\xi_j\}) - \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| < 1.$$

Виберемо одне з таких розбиттів $\{x_j\}$ й узгоджений з ним набір точок $\{\xi_j\}$. Розглянемо послідовність інтегральних сум $\{S_n\}$ для функції $f$, що відповідають розбиттю $\{x_j\}$ й узгодженого з ним набору внутрішніх точок, який відрізняється від $\{\xi_j\}$ не більше, ніж однією точкою, а саме $y_n$. $S_n$ відрізняється від $S(f, \{x_j\}, \{\xi_j\})$ лише одним доданком, який прямує до $\infty$, якщо $n \to +\infty$. Маємо:

$$\left| S_n - \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| < 1 \quad \wedge \quad \lim_{n \to +\infty} S_n = \infty.$$

Виявлена суперечність засвідчує хибність припущення про необмеженість $f$ на $[a;b]$.

У подальших міркуваннях (до встановлення класів інтегровних функцій) обмежимося розглядом інтегральних сум для функції $f$, яка обмежена на проміжку інтегрування $[a;b]$ і не є сталою (область значень $f([a;b])$ не є одноелементною множиною).

**Означення 113.** *Вирази:*

$$\underline{S}(f, \{x_j\}) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x)\, \Delta x_j;$$

$$\overline{S}(f, \{x_j\}) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x)\, \Delta x_j\; -$$

*називають відповідно нижньою та верхньою інтегральними сумами Дарбу*[1] *функції f для розбиття $\{x_j\}$ (надалі — нижня та верхня інтегральні суми розбиття (див. рис. 81–82)).*

---

[1]Жан Ґастон Дарбу (1842–1917) — французький математик, основні праці якого присвячено питанням диференціальних рівнянь і диференціальної геометрії.

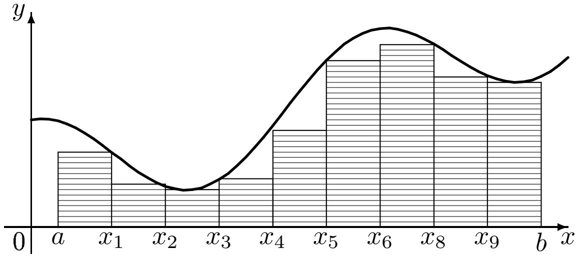



*Рис. 81.* Геометричний зміст нижньої інтегральної суми $\underline{S}$: якщо функція $f$ — невід'ємна на відрізку $[a; b]$, то нижня інтегральна сума — площа об'єднання прямокутників, що *міститься* у частині площини $\{(x; y)|\ a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$, обмеженій прямими $\{x = a\}$, $\{x = b\}$, $\{y = 0\}$ і графіком функції $\{y = f(x)\}$.

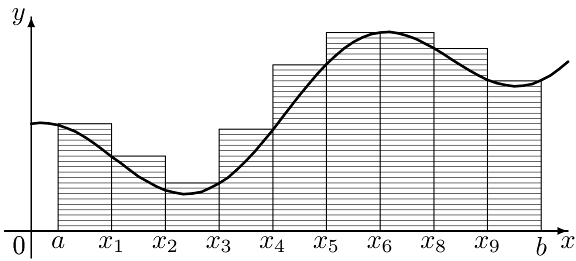



*Рис. 82.* Геометричний зміст верхньої інтегральної суми $\overline{S}$: якщо функція $f$ — невід'ємна на відрізку $[a; b]$, то верхня інтегральна сума — площа об'єднання прямокутників, що *містить* частину площини $\{(x; y)|\ a \le x \le b\ \wedge 0 \le y \le f(x)\}$, обмежену прямими $\{x = a\}$, $\{x = b\}$, $\{y = 0\}$ і графіком функції $\{y = f(x)\}$.

**Означення 114.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Якщо точна нижня межа площ*[1] *багатокутників, що містять плоску фігуру (як підмножину), і точна верхня межа площ багатокутників, які містяться у цій самій фігурі (як підмножини), дорівнюють одному й тому самому дійсному числу $S$, будемо вважати, що площа даної фігури дорівнює $S$.*

2. *Якщо точна нижня межа об'ємів багатогранників, що містять просторове тіло (як підмножину), і точна верхня межа об'ємів багатогранників, які містяться у цьому тілі (як підмножини), дорівнюють одному й тому самому дійсному числу $V$, будемо вважати, що об'єм даної фігури дорівнює $V$.*

**Зауваження 47.** *Якщо невід'ємна неперервна функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — її інтеграл на цьому відрізку — дорівнює площі криволінійної трапеції — фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі абсцис та прямими, проведеними через кінці цього відрізка паралельно осі ординат (див. рис. 83).*

**Доведення.** Дане твердження — наслідок геометричного змісту інтегральних сум Дарбу $\underline{S}$ і $\overline{S}$ (див. рис. 81–83).

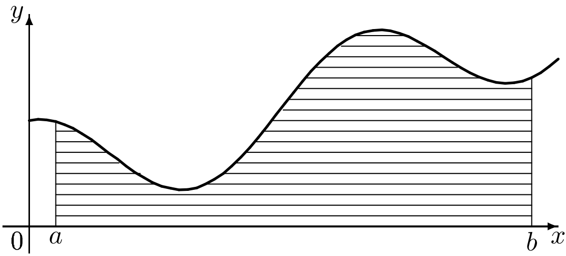



*Рис. 83.* Криволінійна трапеція.

[1] Означення багатокутника та його площі, багатогранника і його об'єму, плоскої фігури та просторового тіла подано у шкільному курсі геометрії.

## 11.5. Властивості інтегральних сум

**Теорема 113.** *Для функції f, визначеної на відрізку $[a;b]$, справджуються такі твердження:*

1. *Нижня та верхня інтегральні суми для фіксованого розбиття відрізка $[a;b]$ — відповідно точні нижня і верхня межі всіх можливих інтегральних сум для цього розбиття.*

2. *Якщо до наявних точок деякого розбиття відрізка $[a;b]$ долучити нові точки цього ж відрізка, то нижня інтегральна сума новоствореного розбиття не зменшиться, а верхня — не збільшиться.*

3. *Будь-яка нижня інтегральна сума не перевищує будь-яку верхню інтегральну суму, навіть якщо вони відповідають різним розбиттям відрізка $[a;b]$.*

**Доведення**

1. Для довільного розбиття $\{x_j\}$ відрізка $[a;b]$ і відповідного йому набору внутрішніх точок $\{\xi_j\}$ справджуються такі нерівності:

$$\inf_{x\in[x_{j-1};x_j]} f(x) \le f(\xi_j) \le \sup_{x\in[x_{j-1};x_j]} f(x). \tag{140}$$

Помножимо члени цих нерівностей відповідно на додатні $\Delta x_j$ і знайдемо суми за $j$. Маємо:

$$\underline{S}(f,\{x_j\}) \le S(f,\{x_j\},\{\xi_j\}) \le \overline{S}(f,\{x_j\}).$$

З означення точної нижньої (верхньої) межі множини дійсних чисел випливає, що на кожному з відрізків $[x_{j-1};x_j]$ вибором внутрішньої точки $\xi_j$ можна зробити різницю між $f(\xi_j)$ та $\inf\{f(x)|\ x\in[x_{j-1};x_j]\}$ ($\sup\{f(x)|\ x\in[x_{j-1};x_j]\}$ відповідно) як завгодно малою за абсолютною величиною. Отже, для набору саме таким чином вибраних внутрішніх точок різницю між інтегральною сумою і нижньою (верхньою) інтегральною сумою можна зробити як завгодно малою за абсолютною величиною.

2. У доведенні достатньо обмежитися приєднанням однієї точки $x'$. Нехай $x_{j-1} < x' < x_j$. Тоді верхня інтегральна сума $\overline{S}'$ для нового розбиття відрізняється від верхньої інтегральної суми $\overline{S}$ розбиття $\{x_j\}$ лише тим, що доданок
$$\sup_{x\in[x_{j-1};x_j]} f(x)\ (x_j - x_{j-1}) \tag{141}$$
у сумі $\overline{S}$ замінено на суму двох доданків:
$$\sup_{x\in[x_{j-1};x']} f(x)\ (x' - x_{j-1}) + \sup_{x\in[x';x_j]} f(x)\ (x_j - x'). \tag{142}$$
Точна верхня межа підмножини не перевищує точну верхню межу самої множини дійсних чисел, тому маємо:
$$\left\{ \begin{array}{r} [x_{j-1};x'] \subset [x_{j-1};x_j] \\ [x';x_j] \subset [x_{j-1};x_j] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sup\limits_{x\in[x_{j-1};x']} f(x) \le \sup\limits_{x\in[x_{j-1};x_j]} f(x) \\ \sup\limits_{x\in[x';x_j]} f(x) \le \sup\limits_{x\in[x_{j-1};x_j]} f(x) \end{array} \right. .$$
Щоб пересвідчитися у тому, що вираз (142) не перевищує вираз (141), достатньо помножити останні нерівності відповідно на $(x' - x_{j-1})$ та $(x_j - x')$ й додати ліві та праві частини отриманих нерівностей. Доведення для нижньої інтегральної суми аналогічне.

3. Нехай $\underline{S}'$ і $\overline{S}'$ — нижня та верхня інтегральні суми одного розбиття, $\underline{S}''$ і $\overline{S}''$ — іншого. Утворимо нове розбиття, множина точок якого містить всі точки першого та другого розбиттів. Позначимо через $\underline{S}$ і $\overline{S}$ нижню та верхню інтегральні суми цього розбиття. Тоді маємо: $\underline{S}' \le \underline{S} \le \overline{S} \le \overline{S}''$, де перша і третя нерівності випливають з другої властивості, а середня — з першої властивості інтегральних сум Дарбу.

## 11.6. Критерій інтегровності

Для всіх можливих розбиттів відрізка $[a;b]$ і функції $f$, визначеної на ньому, позначимо через $\underline{I}$ точну верхню межу множини нижніх інтегральних сум, через $\overline{I}$ точну нижню межу множини верхніх інтегральних сум. Тоді для довільних нижньої $\underline{S}(f,\{x_j\})$ та верхньої $\overline{S}(f,\{x_j\})$ інтегральних сум Дарбу маємо: $\underline{S} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}$.

**Теорема 114.** *Для існування визначеного інтеграла (139) необхідно й достатньо, щоб різниця верхньої та нижньої інтегральних сум для одного й того самого розбиття відрізка* $[a;b]$ *збігалася до нуля, якщо діаметр розбиття прямує до нуля:*

$$\lim_{\lambda(\{x_j\})\to 0}(\overline{S}(f,\{x_j\}) - \underline{S}(f,\{x_j\})) = 0. \tag{143}$$

**Доведення.** Доведемо спочатку необхідність. Хай існує визначений інтеграл $I$ (139). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, при якому для довільного розбиття відрізка $[a;b]$, діаметр якого менший за $\delta$, відповідна інтегральна сума лежить у межах від $I-\varepsilon$ до $I+\varepsilon$. Інтегральні суми Дарбу $\underline{S} = \underline{S}(f,\{x_j\})$ і $\overline{S} = \overline{S}(f,\{x_j\})$ — *точні* межі інтегральних сум для відповідного фіксованого розбиття $\{x_j\}$ відрізка $[a;b]$, тому для будь-якого розбиття, діаметр якого менший за $\delta$, вони лежать у цих же межах: $I-\varepsilon \le \underline{S} \le \overline{S} \le I+\varepsilon$. Таким чином, справджується рівність (143).

Доведемо достатність. Якщо справджується рівність (143), то існує дійсне $I = \underline{I} = \overline{I}$. Якщо $S$, $\underline{S}$ і $\overline{S}$ — відповідно інтегральна сума, нижня та верхня інтегральні суми Дарбу відповідно для одного й того самого розбиття з діаметром $\lambda$, то маємо:

$$\begin{cases} \underline{S} \le I \le \overline{S} \\ \underline{S} \le S \le \overline{S} \end{cases} \Rightarrow |I - S| \le \overline{S} - \underline{S} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0.$$

**Зауваження 48.** *Для будь-якого розбиття* $\{x_j\}$ *відрізка* $[a;b]$ *різниця відповідних йому верхньої та нижньої інтегральних сум для функції* $f$ *дорівнює:*

$$\sum_{j=1}^{n} \sup_{\xi,\eta\in[x_{j-1};x_j]} |f(\xi) - f(\eta)| \; (x_j - x_{j-1}). \tag{144}$$

*Критерій інтегровності функції* $f$ *на відрізку* $[a;b]$ *можна сформулювати як вимогу збіжності до* $0$ *виразу (144) за умови, що* $\lambda(\{x_j\}) \to 0$.

## 11.7. Класи інтегровних функцій

**Теорема 115.** *Справджуються такі твердження:*

1. *Неперервна на відрізку функція інтегровна на ньому.*

2. *Монотонна на відрізку функція інтегровна на ньому.*

3. *Визначена й обмежена на відрізку $[a; b]$ функція $f$ інтегровна на ньому, якщо для довільного $\delta > 0$ можна вказати об'єднання скінченної кількості інтервалів, що містить усі точки $[a; b]$, в яких $f$ не є неперервною, а сума довжин всіх інтервалів цього об'єднання менша, ніж $\delta$.*

**Доведення**

1. Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f$ рівномірно неперервна на ньому, тому

   $$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \xi, \eta \in [a; b] \;\; |\xi - \eta| < \delta \;\Rightarrow\; |f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

   Отже, якщо вибрати діаметр розбиття меншим, ніж відповідне $\delta$, то вираз (144) буде меншим, ніж $\varepsilon$, тобто справджується умова інтегровності.

2. Обмежимося розглядом випадку монотонної неспадної $f$, що не є сталою на $[a; b]$. Тоді для розбиття $\{x_j\}$ отримаємо:

   $$\sup_{\xi, \eta \in [x_{j-1}; x_j]} |f(\xi) - f(\eta)| = f(x_j) - f(x_{j-1}).$$

   Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо:

   $$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

   Якщо $\lambda(\{x_j\}) < \delta$, то вираз (144) дорівнює сумі:

   $$\sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}),$$

   що не перевищує:

   $$\lambda(\{x_j\}) \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \lambda(\{x_j\})(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

   Отже, справджується умова інтегровності $f$ на $[a; b]$.

3. Розглянемо функцію $f$, що визначена на $[a;b]$, задовольняє умову теореми і не є сталою. Для довільного дійсного $\varepsilon > 0$ позначимо через $K_\varepsilon < +\infty$ (найменшу можливу) кількість описаних в умові теореми інтервалів, сума довжин яких менша, ніж

$$\frac{\varepsilon}{3 \sup\limits_{\xi,\eta\in[a;b]} |f(\xi) - f(\eta)|}, \tag{145}$$

і зовні яких функція $f$ неперевна. Доповнення відрізка $[a;b]$ до об'єднання $U_\varepsilon$ цих інтервалів — об'єднання *скінченної* кількості відрізків, на кожному з яких функція $f$ рівномірно неперервна. Виберемо $\delta > 0$ таким, щоб для точок $\xi$ і $\eta$ з одного й того самого відрізка неперервності $f$ з нерівності $|\xi - \eta| < \delta$ випливала така нерівність:

$$|f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{146}$$

Для довільного розбиття $\{x_j\}$ відрізка $[a;b]$, для якого:

$$\lambda(\{x_j\}) < \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{6K_\varepsilon \sup\limits_{\xi,\eta\in[a;b]} |f(\xi) - f(\eta)|}\right), \tag{147}$$

враховуючи, що

$$\sup_{\xi,\eta\in[x_{j-1};x_j]} |f(\xi) - f(\eta)| \le \sup_{\xi,\eta\in[a;b]} |f(\xi) - f(\eta)|,$$

число $\varepsilon/3$ обмежує зверху кожну із сум всіх тих доданків виразу (144), які відповідають:

- відрізкам розбиття $[x_{j-1};x_j]$, що повністю лежать зовні $U_\varepsilon$ (див. (146–147));
- відрізкам розбиття $[x_{j-1};x_j]$, що повністю належать до $U_\varepsilon$ як підмножини (див. (145));
- решті відрізків, кількість яких не перевищує $2K_\varepsilon$ (див. (147)).

Отже, весь вираз (144) менший, ніж $\varepsilon$.

## 11.8. Узагальнення

**Зауваження 49.** *Узагальнимо поняття визначеного інтеграла як поняття невласного інтеграла, тобто:*

- *інтегрування на промені чи всій дійсній прямій за умови, що відповідні інтеграли на відрізках і відповідні границі інтегралів існують:*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\ dx; \quad \int\limits_{\infty}^b f(x)\ dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\ dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{\substack{a\ \to\ -\infty\\ b\ \to\ +\infty}}\int\limits_a^b f(x)\ dx;$$

- *інтегрування в околі точки, в якій підінтегральна функція необмежена:*

  ◦ $\lim\limits_{x\to b}|f(x)| = +\infty$ *і при цьому $f$ інтегровна за Ріманом на всіх відрізках — підмножинах $[a;b)$. Тоді маємо:*

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)\ dx;$$

  ◦ $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = +\infty$ *і при цьому $f$ інтегровна за Ріманом на всіх відрізках — підмножинах $(a;b]$. Тоді маємо:*

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)\ dx.$$

*Означення визначеного інтеграла можна узагальнити на випадок інтегрування функції $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ на множині, що має об'єм (площу для $n=2$), наприклад, є декартовим добутком відрізків. Доведену теорему про існування визначеного інтеграла можна* *узагальнити для функції, неперервної на замкненій обмеженій множині, що має об'єм. Розбиття тоді здійснюється на підмножини, мають мають об'єми $\Delta x_j$ і містять точки $\xi_j$. Діаметр розбиття $\lambda$ у даному разі — найбільша відстань між точками однієї підмножини розбиття.*

*Для функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ інтеграл означимо як елемент $\mathbb{R}^m$, координати якого — інтеграли відповідних координат функції $f$.*

## 11.9. Властивості визначеного інтеграла

**Теорема 116.** *Нехай $c \in [a;b]$, $\alpha \in (-\infty;+\infty)$, $f$, $g$ — інтегровні на $[a;b]$ функції. Тоді маємо:*

$$\min_{x\in[a;b]} f(x)\ (b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le \max_{x\in[a;b]} f(x)\ (b-a);$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \alpha f(x)\ dx &= \alpha \int_a^b f(x)\ dx; \\
\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx; \\
(\forall\ x \in [a;b] \quad f(x) \le g(x)) &\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx; \\
\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| &\le \int_a^b |f(x)|\ dx; \\
\forall\ c \in [a;b] \quad \int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

**Доведення.** Всі рівності і нерівності справджуються, якщо замість інтегралів записати інтегральні суми, що відповідають одному й тому самому розбиттю (при доведенні останньої властивості потрібно розглядати розбиття, що містять точку $c$). Щоб отримати твердження теореми, достатньо спрямувати діаметр розбиття до 0.

**Теорема 117 (про середнє значення).** *Якщо функція f неперервна на $[a; b]$, $a \neq b$, то існує таке $c \in [a; b]$, при якому:*

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\ dx = f(c).$$

**Доведення.** Ліва частина нерівності належить до відрізка:

$$\left[\min_{x \in [a;b]} f(x); \max_{x \in [a;b]} f(x)\right],$$

що є областю значень функції $f$ на $[a; b]$ (див. теорему про проміжне значення неперервної функції).

## 11.10. Похідна й інтеграл

**Теорема 118.** *Для довільних неперервної на $[a; b]$ функції $f$ і $x \in (a; b)$ маємо:*

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\ dt = f(x).$$

**Доведення.** Використавши попередню теорему, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\ dt &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x) - x} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi(x; x + \Delta x)) = f(x), \end{aligned}$$

де $\xi(x; x + \Delta x)$ лежить між $x$ та $x + \Delta x$ і прямує до $x$, якщо $\Delta x \to 0$.

**Наслідок 28.** *Неперервна на відрізку функція має на ньому первісну.*

**Наслідок 29.** *Якщо $F$ — первісна неперервної на $[a;b]$ функції $f$, то*

$$\int\limits_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a). \tag{148}$$

**Доведення.** Первісна визначається з точністю до сталої на $[a;b]$, тому існує така стала $C$, при якій $\int\limits_a^x f(t)\ dt = F(x) + C$. Вибравши $x = a$, маємо: $C = -F(a)$.

Формулу (148) називають *основною формулою інтегрального числення* чи *формулою Ньютона — Лейбніца.*

Приріст функції $F$ на $[a;b]$ позначають так:

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(x)\big|_a^b\,.$$

## 11.11. Формула Валліса

Обчислимо такі інтеграли:

$$J_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\ dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x\ dx,$$

де остання рівність отримується заміною $t = \pi/2 - x$.

Маємо: $J_0 = \pi/2$, $J_1 = 1$. Інтегруючи за частинами, матимемо:

$$J_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x\ d(-\cos x)\ =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x\big|_0^{\pi/2} + (m-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x\ dx\ =$$

$$= (m-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x(1 - \sin^2 x)\ dx\ =\ (m-1)(J_{m-2} - J_m),$$

звідси отримаємо:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Таким чином, для довільного натурального $n$ маємо:

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$J_{2n+1} = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

де $m!!$ — добуток всіх натуральних чисел, що не перевищують $m$ і однакової з ним парності.

Для довільних натурального $n$ і $x \in (0;\pi/2)$ маємо:

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\; dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\; dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\; dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n},$$

де різниця між крайніми членами нерівностей дорівнює:

$$\frac{1}{2n(2n+1)}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким чином, отримаємо *формулу Валліса*[1]:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1} = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},\end{aligned}$$

[1] Джон Валліс (1616–1703) — перший англійський математик, який почав займатися аналізом нескінченно малих величин. Один із засновників і перших членів Лондонського Королівського товариства.

яку він опублікував у 1655 р. у своїй праці "Арифметика нескінченних величин" (в оригіналі подано формулу для $4/\pi$). Ця формула має історичний інтерес як перше подання числа $\pi$ границею послідовності легко обчислюваних раціональних чисел.

## 11.12. Наближене знаходження інтегралів

Подати визначений інтеграл через елементарні функції не завжди можливо. Тоді доводиться використовувати методи наближених обчислень, що дають змогу знаходити наближене значення інтеграла через значення підінтегральної функції для скінченної кількості її аргументів. У найпростіших випадках отримання наближень полегшується геометричними міркуваннями, коли графік функції заміняється ламаною (формула трапецій, див. рис. 84) або об'єднанням частин парабол (формула Сімпсона[1]).

**Лема 10.** *Нехай*

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \tag{149}$$

*де* $a$, $b$, $c$ *— сталі. Для* $h > 0$ *означимо:*

$$y_0 = y(0); \qquad y_{1/2} = y\left(\frac{h}{2}\right); \qquad y_1 = y(h). \tag{150}$$

*Тоді маємо:*

$$\int_0^h y(x)\ dx = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{1/2} + y_1).$$

**Доведення.** З рівностей (149–150) випливають такі рівності:

$$\left\{\begin{array}{c} a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = y_0 \\ a\cdot h^2/4 + b\cdot h/2 + c = y_{1/2} \\ a\cdot h^2 + b\cdot h + c = y_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} c = & y_0 \\ ah^2 + 2bh + 4c = & 4y_{1/2} \\ ah^2 + bh + c = & y_1 \end{array}\right. . \tag{151}$$

Додавши ліві і праві частини рівнянь останньої системи, матимемо:

$$\int_0^h y(x)\ dx \quad = \quad \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Bigg|_0^h = \frac{h}{6}\left(2ah^2 + 3bh + 6c\right) =$$

[1]Томас Сімпсон (1710–1761) — англійський математик.

$$= \quad \frac{h}{6}\left(y_0 + 4y_{1/2} + y_1\right).$$

**Зауваження 50.** *Сталі $a$, $b$, $c$ функції (149) однозначно визначаються значеннями (150).*

**Доведення.** Системи рівнянь (151) еквівалентні таким:

$$\left\{\begin{array}{c} c = y_0 \\ ah + 2b = 4(y_{1/2} - y_0)/h \\ ah + b = (y_1 - y_0)/h \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = y_0 \\ b = (4y_{1/2} - 3y_0 - y_1)/h \\ a = (2y_0 - 4y_{1/2} + 2y_1)/h^2 \end{array}\right. .$$

Використавши заміну змінної $x$ на $x + x_0$, маємо точне значення інтеграла:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} y(x)\ dx = \frac{h}{6}\left(y_0 + 4y_{1/2} + y_1\right) \quad — \tag{152}$$

для функції (149), якщо

$$y_0 = y(x_0), \qquad y_{1/2} = y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), \qquad y_1 = y(x_0 + h).$$

Нехай інтегровна на $[a; b]$ функція відрізняється від функцій вигляду (149). Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на рівні відрізки $[x_{j-1}; x_j]$, $j = 1$, 2, ... , $n$, і виберемо: $h = (b - a)/n$;

$$\begin{array}{lllll} x_0 = a; & x_{1/2} = a + \frac{1}{2}h; & x_1 = a + h; & x_{3/2} = a + \frac{3}{2}h, & \cdots \quad ; \\ y_0 = y(x_0), & y_{1/2} = y(x_{1/2}); & y_1 = y(x_1); & y_{3/2} = y(x_{3/2}) & \cdots \quad . \end{array}$$

На кожному з відрізків замінимо інтеграл $\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} y(x)\ dx$ сумою:

$$\frac{h}{6}(y_{j-1} + 4y_{j-1/2} + y_j),$$

а весь інтеграл

$$\int\limits_a^b y(x)\ dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)\ dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)\ dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} y(x)\ dx \quad —$$

відповідною сумою $\int\limits_a^b y(x)\,dx \approx$

$$\approx \frac{b-a}{6n}(y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots y_{n-1})+4(y_{1/2}+y_{3/2}+\cdots+y_{n-1/2})).$$

Цю формулу називають *параболічною формулою* або *формулою Сімпсона.*

Історично раніше за формулу Сімпсона запропоновано *формулу трапецій* для інтегровної на $[a;b]$ функції $y(x)$:

$$\int\limits_a^b y(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0+y_n+2(y_1+y_2+y_3+\cdots y_{n-1})),$$

що для $y(x) \geq 0$ є наслідком заміни площ криволінійних трапецій площами відповідних прямокутних трапецій (див. рис. 84).

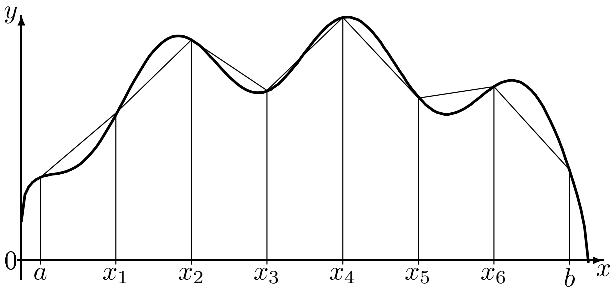



*Рис. 84.* Заміна площ криволінійних трапецій площами трапецій з вершинами на графіку й осі абсцис для наближеного обчислення інтегралів.

**Зауваження 51.** *Наближене значення інтеграла функції формули трапецій — інтегральна сума, що відповідає розбиттю* $[a;b]$ *на* $(n+1)$ *відрізок*[1]

$$\left[x_0; x_0+\frac{h}{2}\right],\ \left[x_1-\frac{h}{2}; x_1+\frac{h}{2}\right],\ \left[x_2-\frac{h}{2}; x_2+\frac{h}{2}\right],\ \ldots,\ \left[x_n-\frac{h}{2}; x_n\right]$$

[1]Використано попередні позначення для $h$ та $x$.

*і значенням функції в точках* $x_0$, $x_1$, ... , $x_n$.

*Наближене значення інтеграла функції формули Сімпсона — інтегральна сума, що відповідає розбиттю* $[a;b]$ *на* $(2n+1)$ *відрізок*

$$\left[x_0; x_0+\frac{h}{6}\right],\ \left[x_{\frac{1}{2}}-\frac{h}{3}; x_{\frac{1}{2}}+\frac{h}{3}\right],\ \left[x_1-\frac{h}{6}; x_1+\frac{h}{6}\right],\ \dots,\ \left[x_n-\frac{h}{6}; x_n\right]$$

*і значенням функції в точках* $x_0$, $x_{1/2}$, $x_1$, $x_{3/2}$, ... , $x_n$.

*З інтегровності функції випливає, що, збільшуючи n, можна з довільною точністю наблизити значення шуканого інтеграла кожною з цих формул. Щодо швидкості збігання наближеного значення інтеграла до точного подамо два твердження без доведення:*

1. *Якщо y — двічі неперервно диференційовна на* $[a;b]$, *то наближене значення* $\int\limits_a^b y(x)\,dx$ *формули трапецій відрізняється від точного на*

$$-\frac{(b-a)^3}{12n^2}y''(\xi), \qquad \text{де } \xi\in[a;b];$$

2. *Якщо функція y неперервно диференційовна на* $[a;b]$ *не менше, як 4 рази, то наближене значення* $\int\limits_a^b y(x)\,dx$ *формули Сімпсона для розбиття* $[a;b]$ *на* $2n$ *рівних відрізків відрізняється від точного на*

$$-\frac{(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4}y^{(4)}(\xi), \qquad \text{де } \xi\in[a;b].$$

## 11.13. Об'єм тіла обертання. Довжина кривої

**Означення 115.** *Нехай* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *— неперервно диференційовні на відрізку* $[a;b]$ *функції.*

1. *Множину точок* $\{(x(t);y(t))|\ t\in[a;b]\}$ *називають неперервно диференційовною кривою на координатній площині.*

2. *Множину точок* $\{(x(t);y(t);z(t))|\ t\in[a;b]\}$ *називають неперервно диференційовною кривою в координатному просторі.*

3. *Довжина кривої — верхня точна межа довжин ламаних, вершини яких є послідовними точками кривої*[1].

**Теорема 119.** *Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, тобто плоскої фігури, обмеженої графіком неперервної невід'ємної функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі абсцис і прямими, проведеними через кінці цього відрізка паралельно осі ординат, дорівнює:*

$$\pi \int\limits_a^b f^2(x)\ dx. \tag{153}$$

*Довжина кривої, координати точок якої — неперервно диференційовні функції змінної $t \in [a;b]$, для кривої на координатній площині дорівнює:*

$$\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt;$$

*для кривої у координатному просторі дорівнює:*

$$\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ dt.$$

**Доведення.** Розглянемо нижню та верхню інтегральні суми для знаходження інтеграла (153) для розбиття $\{x_j\}$ відрізка $[a;b]$:

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^n \min_{x\in[x_{j-1};x_j]} f(x)\ (x_j - x_{j-1}); \quad \overline{S} = \sum_{j=1}^n \max_{x\in[x_{j-1};x_j]} f(x)\ (x_j - x_{j-1}).$$

З геометричної точки зору $\underline{S}$ — об'єм об'єднання циліндрів зі спільною віссю (абсцис), кожні сусідні з яких не мають спільних внутрішніх точок, але мають спільні точки основ, причому саме об'єднання міститься у тілі обертання. $\bar{S}$ — об'єм об'єднання циліндрів з аналогічними властивостями, що містить дане тіло обертання. Якщо $V$ — шуканий об'єм, то маємо: $\underline{S} \le V \le \overline{S}$.

[1] Всі вершини таких ламаних належать до кривої, причому для кожної наступної вершини відповідна змінна $t$ більша, ніж для попередньої.

Для неперервної на $[a;b]$ функції $f$ інтеграл (153) існує, тому маємо: $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай $\{t_j\}_{j=0}^n$ — розбиття відрізка $[a;b]$ — області значень змінної $t$. Довжина ламаної, що з'єднує точки $\{(x(t_j); y(t_j))\}_{j=0}^n$, дорівнює:

$$\sum_{j=1}^n \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \Delta t_j \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\eta_j))^2}, \tag{154}$$

де $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, а існування точок $\xi_j$, $\eta_j \in [t_{j-1}; t_j]$ випливає з теореми Лаґранжа.

$$\left| \sum_{j=1}^n \Delta t_j \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\eta_j))^2} - \sum_{j=1}^n \Delta t_j \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\xi_j))^2} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \Delta t_j \left| \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\eta_j))^2} - \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\xi_j))^2} \right| \leq$$

$$\leq (b-a) \max_j \left| \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\eta_j))^2} - \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\xi_j))^2} \right|.$$

Зауважимо, що різниця

$$\sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\eta_j))^2} - \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\xi_j))^2} \quad -$$

неперервна, а отже, й рівномірно неперервна функція двох змінних $(\xi_j; \eta_j) \in [a;b] \times [a;b]$ — як завгодно мала за абсолютною величиною рівномірно на $[a;b] \times [a;b]$ для достатньо малого $\lambda(\{t_j\})$ — діаметра розбиття. Таким чином, якщо $\lambda(\{t_j\}) \to 0$, то довжина ламаної прямує до границі інтегральних сум:

$$\lim_{\lambda(\{t_j\}) \to 0} \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \sqrt{(x'(\xi_j))^2 + (y'(\xi_j))^2} =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\; dt.$$

Існує послідовність розбиттів, для яких довжина ламаної (154) прямує до точної верхньої межі довжин ламаних. Долученням додаткових точок (якщо це потрібно) можна зробити так, щоб діаметр розбиттів прямував до 0. При цьому довжина відповідної ламаної буде прямувати до точної верхньої межі довжин ламаних[1] і одночасно до інтеграла.

Доведення для кривої у координатному просторі аналогічне.

**Задача 28.** *Для сталої $a > 0$ знайти довжину частини параболи $y = ax^2$, якщо $x \in [0; x_0]$.*

**Розв'язання.** $(ax^2)' = 2ax$. Здійснимо заміну змінних:

$$z = \sqrt{1 + (2ax)^2} + 2ax \Leftrightarrow (z - 2ax)^2 = 1 + (2ax)^2 \Leftrightarrow z^2 - 4axz = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{z^2 - 1}{4az} \Rightarrow dx = \frac{1}{4a}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz = \frac{z^2 + 1}{4az^2}\; dz,$$

де $z(0) = 1$. Позначимо: $z_0 = z(x_0)$. Шукана довжина дорівнює:

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + (2ax)^2} dx = \int_1^{z_0} (z - 2ax(z)) \frac{z^2 + 1}{4az^2}\; dz =$$

$$= \int_1^{z_0} \left(z - 2a\frac{z^2 - 1}{4az}\right) \frac{z^2 + 1}{4az^2}\; dz = \int_1^{z_0} \frac{(2z^2 - z^2 + 1)(z^2 + 1)}{8az^3}\; dz =$$

$$= \int_1^{z_0} \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{8az^3}\; dz = \frac{1}{8a} \int_1^{z_0} \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\right)\; dz =$$

$$= \frac{1}{8a}\left(\frac{z^2}{2} + 2\ln z - \frac{1}{2z^2}\right)\Bigg|_1^{z_0} = \frac{1}{16a}\left(z_0^2 + 4\ln z_0 - \frac{1}{z_0^2}\right).$$

[1]Завдяки нерівності трикутника при долученні додаткових точок розбиття довжина ламаної може тільки зрости.

**Відповідь.**

$$\frac{1}{16a}\left(z_0^2 + 4\ln z_0 - \frac{1}{z_0^2}\right), \quad \text{де } z_0 = \sqrt{1+(2ax_0)^2} + 2ax_0.$$

**Зауваження 52.** *У разі обертання фігури, що не є криволінійною трапецією, цю фігуру потрібно подати різницею криволінійних трапецій, а шуканий об'єм тіла обертання — різницею об'ємів відповідних тіл обертання.*

**Задача 29.** *Обчислити об'єм тора — тіла, утвореного обертанням круга* $\{x^2 + (y-R)^2 \leq r^2\}$, *де* $R > r > 0$, *навколо осі абсцис.*

**Розв'язання.** Для $x \in [-r; r]$ нижнє та верхнє півкола, що обмежують цей круг, задаються відповідно функціями:

$$y_1(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}; \qquad y_2(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2},$$

а шуканий об'єм дорівнює:

$$\pi \int\limits_{-r}^{r} y_2^2(x)\ dx - \pi \int\limits_{-r}^{r} y_1^2(x)\ dx = 4\pi R \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx = 2\pi^2 r^2 R,$$

враховуючи геометричний зміст інтеграла $\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$ як площі півкола радіуса $r$.

**Відповідь.** $2\pi^2 r^2 R$.

# Розділ 12. Комплексні числа

## 12.1. Нормальна форма

**Означення 116.** *Кожній впорядкованій парі дійсних чисел* $(x; y)$ *— елементів координатної площини* $\mathbb{R}^2$ *— поставимо у відповідність суму:*

$$z = x + iy,$$

*яку надалі називатимемо нормальною формою запису комплексного числа z. У даному разі i — символ, який назвемо уявною одиницею. Означимо для таких чисел операції додавання і множення:*

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d); \tag{155}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc), \tag{156}$$

*для яких справджуються сполучний, переставний та розподільний закони, бо вони справджуються для дійсних чисел.*

$0+i\cdot 0$ *— нейтральний елемент щодо додавання (155), який надалі позначатимемо 0. Для довільного* $z = x + iy$ *існує таке протилежне*[1] *до нього число:*

$$-z = (-x) + i(-y),$$

*при якому* $z + (-z) = 0$.

$1 + i \cdot 0$ *— нейтральний елемент щодо множення (156), який надалі позначатимемо 1. Для довільного* $z = x + iy \neq 0$ *існує таке обернене до нього число:*

$$z^{-1} = \frac{x + i(-y)}{x^2 + y^2},$$

*при якому* $z \cdot z^{-1} = 1$.

*Таким чином, точки декартової площини із заданими діями додавання і множення (155–156) утворюють поле, яке називають*

[1] Симетричне відносно початку координат площини $\mathbb{R}^2$.

*полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, а саму площину — комплексною площиною. На цій площині виділяють дійсну вісь — вісь абсцис — і уявну — вісь ординат, які на рисунках позначають відповідно Re $z$ та Im $z$.*

Зауважимо, що для всіх дійсних чисел результат арифметичних дій, запроваджених у полі дійсних чисел $\mathbb{R}$, збігається з результатом відповідних арифметичних дій (155–156), якщо дійсне число $x$ ототожнити з комплексним числом $x + i \cdot 0$. Інакше кажучи, поле комплексних чисел містить поле дійсних чисел.

Надалі елементи дійсної прямої подаватимемо дійсними числами таким чином: $x = x + i \cdot 0$, а елементи уявної осі записуватимемо в такому вигляді: $iy = 0 + iy$.

З означення (156) випливає така рівність: $i^2 = -1$, що пояснює назву *уявна* "одиниця": квадрат довільного *дійсного* числа невід'ємний.

**Означення 117.** *Для комплексного числа $z = x + iy$ в нормальній формі означимо (див. рис. 85):*

- *спряжене до нього $\bar{z} = x+i(-y)$ — симетричне відносно дійсної осі;*
- *абсолютну величину (модуль) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — довжину вектора $\overrightarrow{(x;y)}$, для якої справджується нерівність трикутника: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;*
- $\operatorname{Arg} z$ *— (кутовий) аргумент $z$ — кут від додатного напряму дійсної осі до вектора, спрямованого з початку координат до точки $(x;y)$ координатної площини, невизначений для $z = 0$. Для одного й того самого комплексного числа $z$ існує зліченна множина значень $Arg\ z$, що відрізняються між собою на цілі кратні $2\pi$ (добутки $2\pi$ на цілі числа). Той з аргументів $z$, який належить до $(-\pi;\pi]$, називають головним значенням аргументу і позначають через* $\arg z$;
- $\operatorname{Re} z = x$ *та* $\operatorname{Im} z = y$ *— дійсну й уявну частини комплексного числа $z$.*

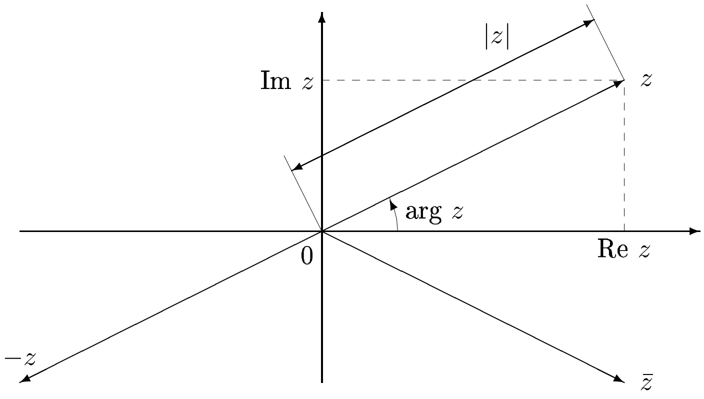



*Рис. 85.* Найпростіші функції комплексного числа.

Тоді маємо: $\mathrm{Arg}(-z) = \mathrm{Arg}\ z + \pi$; $\mathrm{Arg}\ \bar{z} = -\mathrm{Arg}\ z$;

$$|-z| = |\bar{z}| = |z|; \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2; \qquad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

**Означення 118.** *Збіжність ряду комплексних чисел розуміють як одночасну збіжність двох рядів — дійсних та уявних частин всіх членів ряду комплексних чисел. Сума ряду комплексних чисел — комплексне число, дійсна й уявна частина якого є відповідними сумами рядів дійсних і уявних частин всіх членів ряду комплексних чисел.*

## 12.2. Тригонометрична форма

**Означення 119.** *Оберемо на площині промінь з початком $O$ (полярну вісь) і додатний напрям вимірювання кутів. Поставимо у відповідність кожній точці $A \neq O$ площини впорядковану пару $(r; \varphi)$ — полярні координати на площині, де $r$ — відстань між точками $A$ й $O$, $\varphi$ — кут від полярної осі до променя з початком $O$, який містить $A$. Для точки $O$ означимо полярні координати $r = 0$, $\varphi = 0$.*

Існує взаємно однозначна відповідність між множиною точок площини без початку координат і $(0; +\infty) \times (-\pi; \pi]$ — підмножиною значень полярних координат $(r; \varphi)$.

Задамо на комплексній площині полярні координати:

- за полярну вісь оберемо промінь додатних чисел дійсної осі;
- за додатний напрям вимірювання кутів оберемо напрям повороту від дійсної осі до уявної осі на кут $\pi/2$.

Якщо $z = x + iy$ — нормальна форма комплексного числа, то його полярні координати мають такий вигляд: $r = |z|$; $\varphi = \mathrm{Arg}\ z$. При цьому $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. У даному разі запис

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

називають *тригонометричною формою комплексного числа.*

**Теорема 120 (геометричний зміст множення).** *Абсолютна величина добутку комплексних чисел дорівнює добутку абсолютних величин співмножників, а аргумент добутку — сумі аргументів співмножників:*

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= (r_1 r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{157}$$

**Доведення.** Ліва частина рівності (157) дорівнює:

$$\begin{aligned} & (r_1\cos\varphi_1 + ir_1\sin\varphi_1) \cdot (r_2\cos\varphi_2 + ir_2\sin\varphi_2) = \\ = & \ (r_1\cos\varphi_1 \cdot r_2\cos\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1 \cdot r_2\sin\varphi_2) + \\ + & \ i \cdot (r_1\cos\varphi_1 \cdot r_2\sin\varphi_2 + r_1\sin\varphi_1 \cdot r_2\cos\varphi_2). \end{aligned}$$

Виділивши спільний множник $(r_1 r_2)$ і використавши теореми додавання для тригонометричних функцій, отримаємо праву частину рівності (157).

**Наслідок 30.** *Спряжене до добутку комплексних чисел дорівнює добутку спряжених до кожного зі співмножників:* $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

**Наслідок 31 (формула Муавра).**[1] *Для довільних натурального $n$ і дійсних $r$ та $\varphi$ справджується така рівність:*

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

---

[1] Муавр де Абрахам (1667–1754) — англійський математик французького походження. Відомий дослідженнями в галузі теорії комплексних чисел, рядів, теорії ймовірностей.

Цю формулу використовують у поданні $\cos n\varphi$ та $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ $(r = 1)$:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots;$$
$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots.$$

**Зауваження 53.** *Вираз* $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *у тригонометричній формі запису комплексного числа позначатимемо через* $e^{i\varphi}$. *Маємо:*

$$e^{2\pi i} = 1.$$

*Характеристична властивість показникової функції для суто уявних чисел випливає з геометричного змісту операції множення. Ця заміна не формальна, бо функцію* $e^x$ *можна поширити на всю комплексну площину, знаходячи її значення як суму відповідного ряду Тейлора. У цьому підході* $e^{i\varphi}$ *дорівнює:*

$$1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots\right) =$$
$$= \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

*У степеневому ряді для* $e^{i\varphi}$ *один за одним чергуються дійсні та суто уявні доданки, тому здійснені перестановки обґрунтовані щодо знаходження границі часткових сум. Таким чином, справджуються рівності Ейлера:*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Означення неперервності та диференційовності функції можна без ускладнень поширити на множину комплекснозначних функцій *дійсної* змінної, якщо похідну розуміти як суму похідних дійсної та уявної частин значення функції. Тоді маємо:

$$\frac{de^{i\varphi}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (-\sin\varphi + i\cos\varphi) = ie^{i\varphi}.$$

Ці рівності полегшують знаходження сум такого вигляду:

$$x=\sum_{j=1}^{n} j^k \cos j\varphi, \qquad y=\sum_{j=1}^{n} j^k \sin j\varphi \quad -$$

для $\varphi \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, та невід'ємного цілого $k$:

$$z=x+iy=\left(\frac{d}{i\ d\varphi}\right)^k \sum_{j=1}^{n} e^{ij\varphi}=\left(\frac{d}{i\ d\varphi}\right)^k e^{i\varphi}\cdot\frac{e^{in\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1},$$

бо у будь-якому кільці справджується така рівність:

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})=1-q^n.$$

## 12.3. Корені натурального степеня

**Означення 120.** *Для натурального n комплексне число w — корінь n-го степеня комплексного числа z, якщо $w^n=z$.*

**Теорема 121.** *Для комплексного числа $z \neq 0$ існує n різних коренів n-го степеня.*

**Доведення.** Використовуючи тригонометричну форму запису комплексного числа й геометричний зміст операції множення, для кореня $n$-го степеня маємо таке подання:

$$w=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\varphi/n}.$$

Аргумент комплексного числа визначають з точністю до $2\pi$, тому другий співмножник у правій частині останньої рівності набуває $n$ різних значень $\{e^{i(\arg\ z+2k\pi)/n}\}_{k=0}^{n-1}$ (див. рис. 86).

**Теорема 122.** *Корені $n$-го степеня з одиниці утворюють групу, еквівалентну $\mathbb{Z}_n$ (групі класів еквівалентності цілих чисел, що мають однакові остачі при діленні на n) у тому розумінні, що добутку коренів відповідає сума відповідних класів еквівалентності.*

**Доведення.** Кореню $n$-го степеня з 1 $e^{i2j\pi/n}$ поставимо у відповідність клас еквівалентності, що містить $j$, $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Тоді маємо:

$$e^{i2j\pi/n}\cdot e^{i2k\pi/n}=e^{i2(j+k)\pi/n}=e^{i2l\pi/n},$$

якщо $(j+k)\overset{n}{\equiv} l \ \Leftrightarrow\ (j+k-l) \,\vdots\, n \ \Leftrightarrow\ \exists\, m\in\mathbb{Z}\ \ j+k=l+mn.$

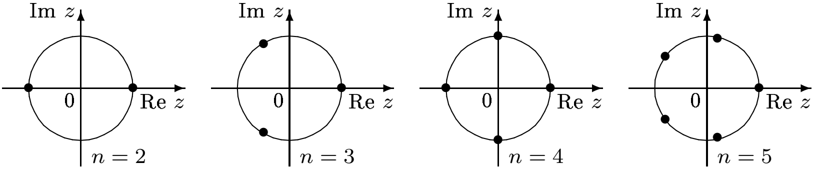



*Рис. 86.* Розташування коренів $n$-го степеня з одиниці на комплексній площині: $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

## 12.4. Експонента й логарифм

**Означення 121.** *Для довільного комплексного $z$ означимо:*

$$e^z = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots . \tag{158}$$

Доведемо коректність такого означення, тобто збіжність ряду (158). Дійсна й уявна частини кожного доданка цього ряду не перевищують за абсолютною величиною відповідні члени збіжного ряду:

$$e^{|z|} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|z|^j}{j!} = 1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \cdots .$$

Дійсна й уявна частини часткових сум ряду (158) збігаються як фундаментальні послідовності повного простору $\mathbb{R}$, бо

$$\max\left(\left|\mathrm{Re}\sum_{j=K}^{L}\frac{z^j}{j!}\right|;\left|\mathrm{Im}\sum_{j=K}^{L}\frac{z^j}{j!}\right|\right) \le \left|\sum_{j=K}^{L}\frac{z^j}{j!}\right| \le \sum_{j=K}^{L}\frac{|z|^j}{j!} \underset{\substack{L \ge K \\ K \to +\infty}}{\longrightarrow} 0.$$

**Теорема 123.** $\forall\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$

**Доведення:**

$$\frac{(z_1+z_2)^l}{l!} = \sum_{j=0}^{l} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{l-j}}{(l-j)!},$$

де праворуч — сума добутків таких членів розкладень $e^{z_1}$ та $e^{z_2}$, сума порядкових номерів яких дорівнює $l$. Різниця

$$\sum_{j=0}^{2n} \frac{z_1^j}{j!} \sum_{k=0}^{2n} \frac{z_2^j}{k!} - \sum_{l=0}^{n} \frac{(z_1+z_2)^l}{l!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \frac{z_1^j}{j!} \sum_{k=0}^{2n} \frac{z_2^j}{k!} - \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{l-j}}{(l-j)!} \tag{159}$$

містить доданки $(z_1^j/j!) \cdot (z_2^k/k!)$, в яких $n < j \leq 2n$ або $n < k \leq 2n$. З огляду на це її абсолютна величина не перевищує:

$$e^{|z_1|} \max \left\{ \frac{|z_2|^j}{j!} \right\}_{j=n+1}^{+\infty} + e^{|z_2|} \max \left\{ \frac{|z_1|^j}{j!} \right\}_{j=n+1}^{+\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Для завершення доведення достатньо здійснити граничний перехід $n \to +\infty$ у рівності (159).

**Наслідок 32.** *Нехай $z = x + iy$ — нормальна форма запису комплексного числа. Тоді маємо:* $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

**Наслідок 33.** *Для довільних комплексного $z = x + iy$, записаного у нормальній формі, і дійсного $t$ маємо:*

$$\begin{aligned}
\frac{de^{zt}}{dt} &= \frac{de^{xt}(\cos yt + i \sin yt)}{dt} = \\
&= xe^{xt}(\cos yt + i \sin yt) + e^{xt}(-y \sin yt + iy \cos yt) = \\
&= (x+iy)e^{xt}(\cos yt + i \sin yt) = ze^{zt}.
\end{aligned}$$

**Означення 122.** *Означимо* $\mathrm{Ln}\ z$ *— логарифм натуральний комплексного числа — такою рівністю:* $z = e^{\mathrm{Ln}\ z}$.

Якщо $z = re^{i\varphi}$ і $\mathrm{Ln}\ z = \rho + i\omega$ — тригонометрична й нормальна форми запису відповідно $z$ та $\mathrm{Ln}\ z$, то маємо:

$$\rho = \ln r; \qquad \omega = \varphi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Як бачимо, для одного й того самого комплексного числа $z$ існує зліченна множина значень $\mathrm{Ln}\ z$, що відрізняються між собою на цілі кратні $2\pi i$ (добутки $2\pi i$ на цілі числа).

## 12.5. Комплексна площина — поле остач

**Теорема 124.** *Поле комплексних чисел — поле остач многочленів з дійсними коефіцієнтами змінної $x$ від ділення на $x^2+1$:*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x] \Big/ \overset{x^2+1}{\equiv}.$$

**Доведення.** Не існує дійсного числа, квадрат якого дорівнює $-1$, тому многочлен $x^2+1$ є незвідним у $\mathbb{R}[x]$. Зауважимо, що остачею в $\mathbb{R}[x]$ від ділення на $x^2+1$ є многочлен, степінь якого не перевищує 1. Кожен такий многочлен має вигляд: $a+bx$. Поставимо йому у відповідність комплексне число $a+ib$. Узгодженість операцій додавання остач та комплексних чисел очевидна. Щодо операції множення маємо:

$$(a+xb)\cdot(c+xd) = ac + x(ad+bc) + x^2bd =$$

$$= (ac-bd) + x(ad+bc) + (x^2+1)bd \overset{x^2+1}{\equiv} (ac-bd) + x(ad+bc).$$

Множина комплексних чисел $\mathbb{C}$ — поле, тому полем є і кільце остач $\mathbb{R}[x] \Big/ \overset{x^2+1}{\equiv}$.

# Розділ 13. Матриці

## 13.1. Матриці та дії з ними

**Означення 123.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Матриця розміру $J \times L$ над полем $\mathbb{K}$ — прямокутна таблиця елементів $\mathbb{K}$, які називають елементами матриці та розташовані у $J$ рядках і $L$ стовпчиках. Матрицю позначають або записують повністю так:*

$$A = ||a_{jl}||_{j=1}^{J}{}_{l=1}^{L} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2L} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{J1} & a_{J2} & a_{J3} & \cdots & a_{JL} \end{pmatrix}. \tag{160}$$

2. *Індекси елемента матриці — номери рядка і стовпчика матриці, до яких належить даний елемент.*

3. *$l$-ий вектор-стовпчик ($j$-ий вектор-рядок) матриці $A$ — вектор, координатами якого є елементи $l$-го стовпчика ($j$-го рядка) матриці $A$, розташовані у порядку зростання нефіксованих індексів.*

4. *Для матриць одного розміру означимо суму — матрицю, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць-доданків:*

$$A + B = ||a_{jl}||_{j=1}^{J}{}_{l=1}^{L} + ||b_{jl}||_{j=1}^{J}{}_{l=1}^{L} = ||a_{jl} + b_{jl}||_{j=1}^{J}{}_{l=1}^{L}.$$

5. *Означимо множення матриць на елементи поля:*

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = ||\lambda \cdot a_{jl}||_{j=1}^{J}{}_{l=1}^{L}.$$

6. *Якщо кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої, то означимо добуток цих матриць як*

*матрицю, в j-му рядку l-го стовпчика якої розташовано скалярний добуток векторів — j-го рядка першої матриці та l-го стовпчика другої матриці:*

$$||a_{jl}||_{j=1}^{J}\,{}_{l=1}^{L} \cdot ||b_{lk}||_{l=1}^{L}\,{}_{k=1}^{K} = \left\|\sum_{l=1}^{L} a_{jl}b_{lk}\right\|_{j=1}^{J}\,{}_{k=1}^{K} \quad -$$

*результат множення матриці $A$ на $B$ справа або $B$ на $A$ зліва.*

7. *Квадратна матриця — матриця з однаковою кількістю рядків і стовпчиків.*

8. $\{a_{jj}\}_{j=1}^{J}$ *та* $\{a_{j\ \ J-j+1}\}_{j=1}^{J}$ *— головна й побічна діагоналі квадратної матриці* $||a_{jk}||_{j=1}^{J}\,{}_{k=1}^{J}$. *Якщо у тексті нема уточнень, то діагональ розуміють як головну діагональ.*

9. *Квадратна матриця $A$ — діагональна, якщо всі її елементи зовні головної діагоналі дорівнюють $0$:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_J \end{pmatrix}.$$

*Діагональні матриці записують ще й так:*

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,\ \ldots\ , \lambda_J).$$

10. *Квадратна матриця $A$ має блочно-діагональний вигляд, якщо існують такі квадратні матриці (можливо, різного розміру) $A_l$, $l = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ J$, при яких:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_J \end{pmatrix}, \qquad (161)$$

*де* $0$ *позначає матриці (можливо, неквадратні й різного розміру), всі елементи яких дорівнюють* $0$*. Рівність (161) слугує означенням такого запису:* $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3, \ \dots\ , A_J)$.

Надалі обмежимося розглядом квадратних матриць одного розміру $N \times N$, для скорочення запису яких не вказуватимемо межі зміни індексів, і векторів-стовпчиків — матриць $N \times 1$, які позначатимемо маленькими латинськими літерами.

**Теорема 125.** *Множина квадратних матриць утворює кільце.*

**Доведення.** Справді, маємо: $(||a_{jk}|| \cdot ||b_{kl}||) \cdot ||c_{lm}|| =$

$$= \left|\left|\sum_{k=1}^{N} a_{jk} b_{kl}\right|\right| \cdot ||c_{lm}|| = \left|\left|\sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{jk} b_{kl} c_{lm}\right|\right| =$$

$$= \left|\left|\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_{jk} b_{kl} c_{lm}\right|\right| = ||a_{jk}|| \cdot \left|\left|\sum_{l=1}^{N} b_{kl} c_{lm}\right|\right| = ||a_{jk}|| \cdot (||b_{kl}|| \cdot ||c_{lm}||).$$

Таким чином, справджується сполучний (асоціативний) закон множення: $(AB)\ C = A(BC)$.

Сполучний закон для додавання: $(A + B) + C = A + (B + C)$ — безпосередній наслідок такого самого закону для поля чисел і означення операції додавання матриць.

Справджується розподільний (дистрибутивний) закон:

$$A(B + C) = AB + AC:$$

$$||a_{jk}|| \cdot (||b_{kl}|| + ||c_{kl}||) = ||a_{jk}|| \cdot ||b_{kl} + c_{kl}|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(b_{kl} + c_{kl})\right|\right| =$$

$$= \left|\left|\sum_{k=1}^{N} a_{jk} b_{kl}\right|\right| + \left|\left|\sum_{k=1}^{N} a_{jk} c_{kl}\right|\right| = ||a_{jk}|| \cdot ||b_{kl}|| + ||a_{jk}|| \cdot ||c_{kl}||.$$

Аналогічно доводять таке співвідношення: $(A + B)\ C = AC + BC$.

Переставний (комутативний) закон додавання: $A + B = B + A$ — безпосередній наслідок такого самого закону для поля чисел і означення операції додавання матриць.

**Зауваження 54.** *Для довільного кільця матриць справджується така рівність:*

$$(\mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3, \ \dots\ , A_J))^n = \mathrm{diag}(A_1^n, A_2^n, A_3^n, \ \dots\ , A_J^n). \qquad (162)$$

**Доведення.** Рівність (162) — наслідок означення множення матриць через скалярний добуток рядка першого співмножника на стовпчик другого співмножника та вигляду (161) блочно-діагональних матриць.

**Означення 124.** *Кожному комплексному числу в нормальній формі $z = x + iy$ поставимо у відповідність матрицю:*

$$M(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}. \qquad (163)$$

*Тоді для довільних комплексних чисел $z_1$ і $z_2$ маємо:*

$$M(z_1 + z_2) = M(z_1) + M(z_2); \qquad M(z_1 \cdot z_2) = M(z_1) \cdot M(z_2).$$

*Таку взаємно однозначну відповідність поля комплексних чисел $\mathbb{C}$ підмножині матриць $2 \times 2$ вигляду (163) з дійсними елементами називають матричним поданням (матричною формою) комплексних чисел.*

## 13.2. Особливості множення матриць

**Зауваження 55.** *Дії з матрицями потрібно здійснювати, враховуючи такі застереження:*

1. *Множення матриць — некомутативне. Наприклад:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Результат множення справа чи зліва матриці $A$ на діагональну матрицю:*

$$\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, \ \dots\ , \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad — \qquad (164)$$

*матриця, всі елементи якої — відповідні елементи матриці $A$, помножені на $\lambda$. Домовимося матриці вигляду (164) надалі позначати через $\lambda$:*

- *якщо $\lambda = 1$, то матрицю (164) називають одиничною матрицею;*
- *якщо $\lambda = 0$, то матрицю (164) називають нульовою матрицею.*

3. *Якщо $j$-ий рядок співмножника $A$ добутку матриць $AB$ складається з нулів, то й $j$-ий рядок добутку матриць $AB$ містить лише нулі.*

4. *Якщо $k$-ий стовпчик співмножника $B$ добутку матриць $AB$ складається з нулів, то й $k$-ий стовпчик добутку матриць $AB$ містить лише нулі.*

5. *Нехай для $j \neq k$:*

$$D_{jk} = \left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

*— матриця, в якої у $j$-му рядку $k$-го стовпчика та в $k$-му рядку $j$-го стовпчика розташовано $1$, всі інші елементи зовні діагоналі дорівнюють $0$, а елементи діагоналі — $1$, крім тих, які стоять у $j$-му та $k$-му рядках і дорівнюють $0$. Тоді множення матриці $A$ на матрицю $D_{jk}$ веде:*

- *зліва — до взаємної заміни (переставляння) $j$-го й $k$-го рядків матриці $A$ при збереженні незмінними значень елементів усіх інших рядків;*
- *справа — до взаємної заміни (переставляння) $j$-го й $k$-го стовпчиків матриці $A$ при збереженні незмінними значень елементів усіх інших стовпчиків.*

6. *Нехай $\Lambda_{jk}$ — матриця, в якої в $j$-му рядку $k$-го стовпчика розташоване число $\lambda$, а всі інші елементи дорівнюють $0$. Тоді множення матриці $A$ на матрицю*

$$1+\Lambda_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & \lambda & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*веде:*

- *зліва — до додавання до $j$-го рядка матриці $A$ $k$-го рядка цієї матриці, помноженого на $\lambda$, при збереженні незмінними значень елементів усіх інших рядків;*
- *справа — до додавання до $k$-го стовпчика матриці $A$ $j$-го стовпчика цієї матриці, помноженого на $\lambda$, при збереженні незмінними значень елементів усіх інших стовпчиків.*

Суму рядків (стовпчиків) матриці розуміємо як суму відповідних векторів-рядків (векторів-стовпчиків).

**Означення 125.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Матриця $C^{-1}$ обернена до матриці $C$, якщо її добуток з $C$ дорівнює одиничній матриці, тобто $C^{-1}\cdot C=1$.*

2. *Матрицю називають невиродженою, якщо існує обернена до неї.*

3. *Позначимо через $GL(N,\mathbb{K})$ групу невороджених матриць розміру $N\times N$ над полем $\mathbb{K}$ щодо множення. $GL(N,\mathbb{K})$ називають також*[1] *(повною) групою лінійних перетворень $N$-вимірного векторного простору над полем $\mathbb{K}$.*

**Зауваження 56.** *Для довільних поля $\mathbb{K}$ і натурального $N$:*

1. *Множина $GL(N,\mathbb{K})$ утворює групу, бо*

$$\forall\ A,\ B\in GL(N,\mathbb{K})\quad (B^{-1}A^{-1})AB=1\ \Leftrightarrow\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

2. *Завдяки асоціативності множення матриця, обернена до даної зліва, — лівий обернений елемент групи $GL(N,\mathbb{K})$ — єдина і дорівнює оберненій до даної матриці справа:*

$$C^{-1}\cdot C=C\cdot C^{-1}=1.$$

Безпосередньою перевіркою можна пересвідчитися, що

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

## 13.3. Лінійні системи рівнянь і матриці

Будь-яку систему $n$ лінійних рівнянь з коефіцієнтами з поля $\mathbb{K}$ відносно $m$ змінних

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2m}x_m & =b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\ \dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n\end{array}\right. \tag{165}$$

[1]Зміст кожного слова поданої далі назви стане зрозумілим лише після ознайомлення з курсом вищої алгебри.

можна записати у такому вигляді:

$$Ax = b,$$

де $A = ||a_{jk}||$ — ***головна матриця*** розміру $n \times m$ відомих коефіцієнтів рівнянь над полем $\mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}^n$ — вектор-стовпчик відомих правих частин рівнянь, $x \in \mathbb{K}^m$ — вектор-стовпчик невідомих $m$ змінних. Якщо матриця $A$ — квадратна ($n = m$) і невироджена, то маємо:

$$x = A^{-1}b.$$

Прийнятною формою запису системи (165) є запис у вигляді ***розширеної матриці*** розміру $n \times (m + 1)$:

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array} \right), \qquad (166)$$

де наявність вертикальної риски перед вектором-стовпчиком правих частин обов'язкова.

Систему рівнянь (165) можна розв'язувати методом послідовного виключення змінних — ***методом Гауса***[1], коли крок за кроком за допомогою еквівалентних перетворень видозмінюють дану систему (165), щоб зменшити кількість змінних у рівняннях і отримати розв'язок.

1. Виберемо рівняння з найменшим порядковим номером, в якому коефіцієнт при $x_1$ відмінний від 0, і поміняємо його місцями з першим рівнянням системи (165). Розглядаючи обране рівняння тільки відносно $x_1$, знаходимо вираз для $x_1$ через відомі коефіцієнти та решту змінних. Підставляємо отримане значення для $x_1$ у всі, крім вибраного, рівняння, яке залишаємо без змін. Так здійснюється перше перетворення системи (165) на еквівалентну їй систему, в якої в усіх рівняннях, крім першого,

[1] Карл Фрідріх Гаус (1777–1855) — німецький математик, фізик, астроном і геодезист. Його роботи суттєво вплинули на розвиток вищої алгебри, диференціальної геометрії, теорії тяжіння, класичної теорії електрики та магнетизму. Автор багатьох доведень *основної теореми алгебри* про розкладення будь-якого многочлена над полем комплексних чисел на лінійні множники.

відсутня змінна $x_1$. Якщо коефіцієнти при $x_1$ в усіх рівняннях системи дорівнюють 0, то робимо висновок, що $x_1$ може набувати довільного значення.

2. Беручи за основу систему, отриману після першого перетворення початкової, вибираємо серед всіх рівнянь, крім першого[1], таке рівняння з найменшим порядковим номером, у якого коефіцієнт при $x_2$ відмінний від 0. Поміняємо його місцями з другим[2] рівнянням системи й виразимо з нього $x_2$ через відомі коефіцієнти та решту змінних. Підставимо отримане значення $x_2$ в усі рівняння системи, крім того, з якого визначили $x_2$ і яке залишимо без змін. Таким чином здійснюється друге перетворення системи (165) на еквівалентну їй систему, в якій змінні $x_1$ та $x_2$ містяться не більше, ніж в одному рівнянні. Якщо коефіцієнти при $x_2$ в усіх[3] рівняннях системи дорівнюють 0, то робимо висновок, що $x_2$ може набувати довільного значення.

$k$. На $k$-му кроці перетворень системи (165) беремо за основу систему, отриману на попередньому $(k-1)$-му кроці перетворень. Вибираємо з її рівнянь, крім перших[4] $(k-1)$, таке рівняння з найменшим порядковим номером, у якого коефіцієнт при $x_k$ відмінний від 0. Поміняємо це рівняння місцями[5] з $k$-им рівнянням. Виразимо з цього рівняння $x_k$ і підставимо його в усі рівняння системи, крім того, з якого визначили $x_k$ і яке залишимо без змін. Якщо коефіцієнти при $x_k$ в усіх[6] рівняннях системи дорівнюють 0, то робимо висновок, що $x_k$ може набувати довільного значення.

Виконання алгоритму продовжуємо доти, доки є змога виключати змінні з усіх рівнянь системи. Якщо на якомусь кроці за допомо-

---

[1] З усіх, якщо ми дійшли висновку, що $x_1$ може бути довільним.

[2] З першим, якщо ми дійшли висновку, що $x_1$ може бути довільним.

[3] В усіх, крім першого, якщо система зазнала змін на першому кроці перетворень.

[4] Крім перших $(k-1-l)$, якщо ми дійшли висновку, що серед $(k-1)$ перших таких змінних, які можуть набирати довільного значення, є $l$.

[5] З $(k-l)$-им, якщо ми дійшли висновку, що серед $(k-1)$ перших таких змінних, які можуть набирати довільного значення, є $l$.

[6] В усіх, крім перших $m$, якщо система зазнала змін на $m$ кроках перетворень з перших $k$.

гою еквівалентних перетворень системи (165) отримаємо рівняння вигляду $0 = c$, то:

- якщо $c \neq 0$, робимо висновок, що система — несумісна;
- якщо $c = 0$, вилучаємо отримане рівняння (тотожність) з розгляду.

Якщо вдається отримати сумісну систему, що містить тільки рівняння такого вигляду: $c_j x_j = d_j$, де $c_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, то єдиний розв'язок цієї системи — єдиний розв'язок початкової системи (165). Виконавши скінченну кількість вказаних еквівалентних перетворень системи рівнянь, за домомогою методу Гауса можна встановити сумісність чи несумісність системи (165), причому для сумісної системи вказати всі розв'язки (якщо розв'язок не єдиний, то виразити одні невідомі змінні через інші).

Цей алгоритм для системи рівнянь (165), поданої розширеною матрицею (166), має такий вигляд:

1. Виберемо $j$-ий рядок розширеної матриці (166), в якому елемент першого стовпчика $a_{j1}$ відмінний від 0. Поміняємо місцями цей рядок з першим і поділимо всі елементи обраного рядка на $a_{j1}$, щоб отримати 1 в першому рядку першого стовпчика. Від кожного з наступних векторів-рядків поелементно віднімаємо отриманий перший вектор-рядок, помножений на елемент першого стовпчика рядка-зменшуваного з метою отримання в усіх наступних рядках 0 у першому стовпчику. Так перетворюється початкова розширена матриця на першому кроці. Якщо перший вектор-стовпчик матриці (166) містить лише нулі, то робимо висновок, що $x_1$ може набувати довільного значення.

2. З усіх, крім першого[1], рядків розширеної матриці, отриманої після першого кроку перетворень, виберемо рядок, в якому елемент другого стовпчика відмінний від 0. Поміняємо місцями цей рядок з другим[2] рядком розширеної матриці, яку ми розглядаємо, й поділимо всі його елементи на цей відмінний від 0 елемент, щоб отримати 1 у другому стовпчику даного рядка,

[1] З усіх, якщо ми дійшли висновку, що $x_1$ може бути довільним.

[2] З першим, якщо ми дійшли висновку, що $x_1$ може бути довільним.

після чого залишити його без змін. Від кожного з решти рядків розширеної матриці поелементно віднімаємо отриманий рядок, помножений на елемент другого стовпчика рядка-зменшуваного, з метою отримання 0 у всіх інших рядках другого стовпчика. Таким є другий крок перетворень розширеної матриці. Якщо усі[1] елементи другого стовпчика отриманої після першого кроку матриці дорівнюють 0, то робимо висновок, що $x_2$ може набувати довільного значення.

*k*. На $k$-му кроці перетворень початкової розширеної матриці беремо за основу розширену матрицю, отриману після виконання $(k-1)$-го кроку. Вибираємо серед всіх її рядків, крім перших[2] $(k-1)$-го, той, у якого елемент $k$-го стовпчика відмінний від 0. Поміняємо цей рядок місцями[3] з $k$-им і поділимо всі елементи обраного рядка на цей елемент, щоб отримати 1 у $k$-у стовпчику даного рядка. Віднімаючи від кожного з рядків, крім вибраного, вибраний вектор-рядок, домножений на елемент $k$-го стовпчика рядка-зменшуваного, отримуємо $k$-е перетворення початкової розширеної матриці — матрицю, в якої у перших $k$ стовпчиках або елемент діагоналі основної матриці дорівнює 1, а решта дорівнюють 0, або елемент діагоналі основної матриці дорівнює 0. Якщо всі[4] елементи $k$-го стовпчика дорівнюють 0, то робимо висновок, що $x_k$ може набувати довільного значення.

Якщо на якомусь кроці описаних послідовних перетворень розширеної матриці (166):

- отримаємо рядок, всі елементи якого дорівнюють 0, то такий рядок вилучаємо з матриці, бо йому відповідає тотожність вигляду $0 = 0$;

- отримаємо рядок, всі елементи якого дорівнюють 0, крім останнього — в $(m+1)$-му стовпчику, то робимо висновок, що система

[1] Усі, крім того, що в першому рядку, якщо матриця зазнала змін на першому кроці.

[2] Крім перших $(k-1-l)$, якщо ми дійшли висновку, що серед $(k-1)$ перших таких змінних, які можуть набувати довільного значення, є $l$.

[3] З $(k-l)$-им, якщо ми дійшли висновку, що серед $(k-1)$ перших таких змінних, які можуть набувати довільних значень, є $l$.

[4] Всі, крім перших $m$, якщо система зазнала змін на $m$ кроках перетворень з перших $k$.

(165) несумісна.

Для розширеної матриці (166) можливо виконати вказаним способом не більше, ніж $k = \min(n, m)$ перетворень рядків. Якщо цими перетвореннями з матриці (166) для $n \geq m$, враховуючи можливість вилучення нульових рядків розширеної матриці, отримаємо розширену матрицю, в якої головна матриця — одинична матриця розміру $m \times m$, то система (165) має єдиний розв'язок, записаний у вигляді $(m+1)$-го вектора-стовпчика остаточної розширеної матриці. І навпаки, з єдиності розв'язку системи (165) випливає можливість такого перетворення матриці (166).

**Зауваження 57.** *Для квадратної матриці $A$, коли $m = n$, алгоритм полягає у намаганні певними діями з рядками головної матриці — множенням її зліва на матриці $X$, $Y$, ... , $Z$ певного вигляду $1+\Lambda_{jk}$ чи $D_{jk}$ (див. зауваження 55) — отримати одиничну матрицю як головну. Якщо це вдається, то маємо:*

$$X \cdot Y \cdot \ \cdots \ \cdot Z \cdot A = \underbrace{(X \cdot Y \cdot \ \cdots \ \cdot Z \cdot 1)}_{A^{-1}} \cdot A = 1.$$

*Отже, щоб отримати обернену до невиродженої квадратної матриці $A$, достатньо з рядками матриці* 1 *здійснити ті самі дії, які здійснюють з рядками матриці $A$ при перетворенні її на одиничну.*

Продемонструємо запропонований спосіб запису на прикладі розв'язування системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} x + 2y = \ 5 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Тут і надалі символом $\sim$ позначено відношення еквівалентності матриць, для якого еквівалентними є матриці, отримувані одна з іншої вказаними перетвореннями рядків. Дії над рядками були такими: спочатку від 2-го рядка відняли 1-ий, помножений на 2, а потім від 1-го відняли 2-ий, помножений на 2. Таким чином, $x = 3$, $y = 1$. Виконаємо ці самі дії над одиничною матрицею, щоб отримати обернену до головної матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.$$

## 13.4. Матриці і графи

**Означення 126.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Граф $G$ — множина, що складається з елементів двох типів: вершин $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... і пар вершин $(A_j; A_k)$. Граф може не містити жодної пари вершин, але обов'язково містить вершини.*

2. *Впорядкована пара вершин — одноелементна підмножина декартового добутку множини вершин на себе. Таку пару ще називають дугою і на рисунку позначають лінією[1] зі стрілкою (від зображення першої вершини до зображення другої).*

3. *Невпорядкована пара вершин — двоелементна підмножина вигляду $\{(A; B), (B; A)\}$ декартового добутку множини вершин на себе. Така пару ще називають ребром і на рисунку позначають лінією без стрілки (між зображеннями вершин пари).*

4. *Для різних вершин $A_j$ та $A_k$ будемо вважати, що дуга чи ребро $(A_j; A_k)$ сполучає (з'єднує) вершину $A_j$ з вершиною $A_k$. При цьому ребро $(A_j; A_k)$ сполучає вершину $A_k$ з вершиною $A_j$, а дуга $(A_j; A_k)$ — ні.*

5. *Петля — дуга чи ребро вигляду $(A_j; A_j)$, що сполучає вершину $A_j$ саму із собою.*

6. *Пара вершин може сполучатись двома чи більше дугами (ребрами). Такі дуги (ребра) називають кратними. Для $m$-ої дуги (ребра), що сполучає вершину $A_j$ з вершиною $A_k$, запровадимо позначення $(A_j; A_k)_m$.*

7. *Граф вважають:*

[1] На рисунку різним дугам (ребрам) відповідають різні лінії, що не містять зображень інших вершин графа.

- *орієнтованим, якщо, крім вершин, він містить лише дуги (див. рис. 87–88);*
- *неорієнтованим, якщо, крім вершин, він містить лише ребра;*
- *порожнім, якщо він містить лише вершини.*

8. *Для графа $G$ з $N$ вершинами і скінченною кількістю дуг та ребер утворимо матрицю $A_G$ розміру $N \times N$, яку називають матрицею суміжності, таким чином: у $j$-му рядку $k$-го стовпчика розташуємо загальну кількість дуг і ребер, що сполучають $j$-у вершину з $k$-ою.*

9. *Послідовність дуг (ребер) $(A_{j_0}; A_{j_1})$, $(A_{j_1}; A_{j_2})$, $(A_{j_2}; A_{j_3})$, ... , $(A_{j_{m-1}}; A_{j_m})$ називають маршрутом з вершини $A_{j_0}$ до $A_{j_m}$ за m кроків. Якщо граф містить і дуги, і ребра, то й маршрут може містити і дуги, і ребра одночасно.*

10. *Цикл у неорієнтованому графі — маршрут з вершини графа до неї самої.*

11. *Граф є зв'язним, якщо для будь-яких двох його різних вершин існує маршрут з першої до другої.*

12. *Дерево — неорієнтований зв'язний граф без циклів*[1].

Окремий випадок орієнтованого графа — граф відношення (функції) з однієї множини в іншу.

**Означення 127.** *Графом відношення $\varphi$ з множини A у множину B називають множину, що складається з вершин (елементів множин A і B) і дуг — впорядкованих пар $(a; b)$, що належать відношенню.*

Прикладом неорієнтованого графа є схема залізничного сполучення з вершинами — залізничними станціями — і ребрами — відповідними ділянками залізниці.

**Зауваження 58.** *Деякі властивості графа можна описати в термінах матриці суміжності:*

[1] Кількість ребер дерева з $n$ вершинами дорівнює $n - 1$.

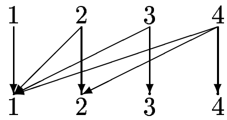
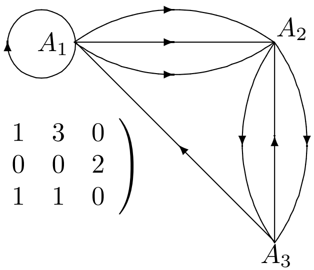


*Рис. 87.* Граф відношення подільності на $\{1, 2, 3, 4\}$.



$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Рис. 88.* Приклад орієнтованого графа: 3 вершини і 8 дуг, причому $(A_1; A_1)$ — петля. $A_G$ — матриця суміжності вершин.

1. *Якщо граф не має петель, то всі діагональні елементи його матриці суміжності дорівнюють* $0$.

2. *Якщо граф не має кратних ребер, то всі елементи його матриці суміжності дорівнюють* $0$ *або* $1$.

3. *Якщо граф неорієнтований, то його матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі.*

4. *Для неорієнтованого незв'язного графа існує така нумерація вершин, для якої матриця суміжності графа має блочно-діагональний вигляд.*

**Теорема 126.** *Нехай граф $G$ містить $N$ вершин і скінченну кількість дуг та ребер. Тоді елемент $a_{jk}^{(m)}$ $j$-го рядка $k$-го стовпчика матриці $A_G^m$ — $m$-го степеня матриці суміжності $A_G$ — дорівнює кількості різних маршрутів з $j$-ої вершини у $k$-ту за $m$ кроків.*

**Доведення** (методом математичної індукції за $m$ з використанням комбінаторного правила множення). Для $m = 1$ твердження теореми еквівалентне означенню $A_G$. Припустимо, що воно справджується для якогось натурального $m$. Тоді маємо: $a_{jk}^{(m+1)} = \sum\limits_{l=1}^{N} a_{jl}^{(m)} \cdot a_{lk}^{(1)}$, де перший співмножник доданків правої частини рівності дорівнює кількості різних маршрутів з $j$-ої вершини до $l$-ої за $m$ кроків, а другий — кількості різних дуг та ребер, що сполучають $l$-ту вершину з $k$-тою.

## 13.5. Нормальна форма Жордана

Поданий далі матеріал має допоміжний характер і слугуватиме для скороченого запису так званої системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та її розв'язків.

**Означення 128.** *$A$ — нормальна форма*[1] *Жордана*[2] *квадратної матриці $B$, якщо існує така невироджена матриця $C$, при якій:*

$$B = CAC^{-1}, \qquad A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3, \ \dots\ , A_L),$$

*причому квадратні матриці (можливо, різних розмірів) $A_l$, $l = 1$, $2$, ... , $L$ мають певний вигляд: число $\lambda_l$ — на головній діагоналі, всі елементи з індексами $(j; j+1)$, розташовані безпосередньо над діагоналлю, дорівнюють $1$, на всіх інших місцях — $0$.*

*Матрицю $A_l$, $l = 1$, $2$, ... , $L$ називають блоком нормальної форми Жордана матриці $B$ з відповідним числом $\lambda_l$ на діагоналі.*

$$A_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_l & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_l & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_l & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix} = \lambda_l + I_l,$$

[1] У курсі вищої алгебри доведено існування такої нормальної форми для матриць над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та описано алгоритм її знаходження.

[2] Каміль Марі Едмон Жордан (1838–1922) — французький математик, праці якого стосуються алгебри, теорії чисел, теорії функцій, геометрії, топології, диференціальних рівнянь і кристалографії.

*де $I_l$ — квадратна матриця тих самих розмірів, що й $A_l$, всі елементи якої дорівнюють 0, крім тих, які розташовані безпосередньо над* [1] *діагоналлю, тобто мають індекси $(j; j+1)$, і дорівнюють 1:*

$$I_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{167}$$

Збільшення степеня $I_l$ "рухає лінію одиниць" на 1 позицію вгору (праворуч):

$$I_l^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{168}$$

$$I_l^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{169}$$

Таким чином, $I_l$ у степені, що дорівнює кількості рядків (стовпчиків) цієї матриці, складається з нулів. Такі матриці, певний степінь яких дорівнює 0, називають *нільпотентними.*

[1] Інколи розглядають нормальну форму нижньотрикутного вигляду, коли одиниці розташовані *під* діагоналлю.

# Розділ 14. Диференціальні рівняння

Обмежимося розглядом функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ для натуральних $n$. Похідну $f'$ розумітимемо як вектор — елемент $\mathbb{R}^n$, координати якого — похідні відповідних координат $f \in \mathbb{R}^n$.

## 14.1. Звичайні диференціальні рівняння

**Означення 129.** *Запровадимо такі поняття:*

1. *Звичайне диференціальне рівняння — рівняння відносно невідомої функції дійсного аргументу, в якому обидві частини рівності залежать тільки від скінченної кількості похідних невідомої функції дійсної змінної та самої цієї змінної. Розв'язком такого диференціального рівняння є функція, що задовольняє це рівняння.*

2. *Перенесенням доданків у ліву частину рівності будь-яке звичайне диференціальне рівняння можна звести до рівняння такого вигляду:* $F(t, f(t), f'(t), f''(t),\ \dots\ , f^{(n)}(t)) = 0$*, де* $n$ *— порядок старшої похідної — називають порядком рівняння.*

3. *Звичайне диференціальне рівняння в нормальній формі — рівняння, в якому старшу похідну невідомої функції подано через похідні нижчого порядку й аргумент:*

$$f^{(n)}(t) = F(t, f(t), f'(t), f''(t),\ \dots\ , f^{(n-1)}(t)). \tag{170}$$

**Зауваження 59.** *Будь-яке звичайне диференціальне рівняння у нормальній формі (170) можна записати як звичайне диференціальне рівняння першого порядку* $y'(t) = Y(t, y(t))$ *для невідомої функції з множиною значень — підмножиною простору більшої вимірності.*

**Доведення.** Для $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ розглянемо таку функцію:

$$y(t) = (y_0(t), y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t)) = (f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t))$$

— вектор розмірності $kn$, координати якого — координати всіх векторів $y_0(t) = f(t)$, $y_1(t) = f(t)$, ... , $y_n(t) = f(t)$. Тоді $y'(t)$ дорівнює:

$$(f'(t), f''(t), \ \dots \ , f^{(n-1)}(t), F(t, f(t), f'(t), \ \dots \ , f^{(n-1)}(t)) =$$

$$= (y_1(t), y_2(t), \ \dots \ , y_{n-1}(t), F(t, y_0(t), y_1(t), \ \dots \ , y_{n-1}(t)),$$

що й потрібно було довести.

## 14.2. Існування і єдиність розв'язку

У формулюванні поданої нижче теореми:

$|t|$ — абсолютна величина для $t \in \mathbb{R}$;

$|y|$ — одна з норм $\mathbb{R}^n$, запроваджених у наслідку 26, для $y \in \mathbb{R}^n$;

$C([a;b], \mathbb{R}^n)$ — повний простір неперервних функцій $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ з такою нормою: $|y|_\infty = \max\limits_{t \in [a;b]} |y(t)|$.

Використовуючи повноту $\mathbb{R}^n$ (див. наслідок 26), можна довести повноту $C([a;b], \mathbb{R}^n)$, майже нічого не змінивши у доведенні теореми 91 про повноту $C([a;b])$.

**Теорема 127.** *Нехай у рівнянні*

$$y'(t) = Y(t, y(t)) \tag{171}$$

*маємо:*

- $y(t)$ *— функція дійсної змінної* $t$ *— набуває значень у* $\mathbb{R}^n$*;*
- *для* $(t_0; y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *— внутрішньої точки області визначення функції* $Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— існують такі дійсні* $\varepsilon > 0$ *і* $M > 0$*, при яких на множині* $U_{\varepsilon M} = U_{\varepsilon M}(t_0; y_0) =$
$= \{(t, y) \in \mathbb{R} \times R^n | \quad |t - t_0| \le \varepsilon \ \wedge \ |y - y_0| \le M\}$ :
    - *функція* $Y$ *неперервна;*
    - *для фіксованої першої змінної* $t$ *відношення норми приросту* $Y$ *до відповідної норми приросту другої змінної* $y$ *обмежене (умова Ліпшиця*[1]*):*

$$\exists \ L \in \ (0; +\infty) \quad \forall \ (t, y), \ (t; z) \in U_{\varepsilon M}(t_0, y_0)$$

$$|Y(t, y) - Y(t, z)| < L|y - z|. \tag{172}$$

[1] Рудольф Ліпшиць (1832–1903) — німецький математик.

*Тоді існує таке $\delta > 0$, при якому на множині*

$$\{y \in C([t_0 - \delta; t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) \,|\, |y - y_0|_\infty \le M\} \tag{173}$$

*існує єдиний розв'язок рівняння (171), для якого справджується така умова:*

$$y(t_0) = y_0. \tag{174}$$

**Доведення.** Якщо маємо:

$$0 < \delta \le \varepsilon, \tag{175}$$

то система (171, 174) для $y$ з множини (175) еквівалентна такому рівнянню[1]:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} Y(s, y(s))\; ds,$$

тобто кожний розв'язок системи (171, 174) — розв'язок цього рівняння, і навпаки. Розглянемо відображення $F$ множини (175) у простір $C([t_0 - \delta; t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$, для якого функція $Fy$ в точці $t$ набуває такого значення:

$$Fy(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} Y(s, y(s))\; ds.$$

Тоді для $t \in [t_0; t_0 + \delta]$, $y,\ z$ з множини (175) маємо:

$$\begin{aligned} |Fy(t) - Fz(t)| &\le \int_{t_0}^{t} |Y(s, y(s)) - Y(s, z(s))|\; ds \;\le \\ &\le \int_{t_0}^{t} L|y(s) - z(s)|\; ds \le L\delta |y - z|_\infty . \end{aligned}$$

Аналогічно доводять цю нерівність і для $t \in [t_0 - \delta; t_0]$, $y,\ z$ з множини (175). Якщо виберемо:

$$\alpha = L\delta < 1, \tag{176}$$

[1] Інтеграл існує, бо підінтегральний вираз неперервний за змінною інтегрування.

то отримаємо:

$$|Fy - Fz|_\infty \le \alpha|y - z|_\infty < |z - y|_\infty. \tag{177}$$

Водночас для довільних $t \in [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$, $y$ з множини (175) маємо:

$$|Fy(t) - y_0| \le \left| \int_{t_0}^{t} |Y(s, y(s))| \, ds \right| \le \delta Y_{\max}, \tag{178}$$

де з неперервності $Y$ на замкненій обмеженій множині $U_{\delta M}$ випливає існування такої сталої:

$$Y_{\max} = \max_{(s;y) \in U_{\delta M}(t_0;y_0)} |Y(s, y)| < +\infty. \tag{179}$$

Виберемо $\delta$ так, щоб справджувались умови (175–179) і така нерівність:

$$\delta Y_{\max} \le M. \tag{180}$$

Тоді перетворення $F$ відображає *замкнену* множину (175) у себе (див. нерівності (178–180)). Цю множину, що є повним метричним (але не векторним) простором, відображення $F$ стискає (див. нерівності (176–177)). Отже, в цьому просторі існує єдина нерухома точка відображення $F$ — розв'язок *задачі Коші* пошуку розв'язку рівняння (171) з *початковою умовою* (174).

**Означення 130.** *Функція $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ диференційовна (за Фреше[1]) у $x$ — внутрішній точці області визначення $f$, якщо існує така матриця $\partial f/\partial x = ||\partial f_j/\partial x_k||_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ часткових похідних координат $f_j$ за координатами $x_k$, при якій для довільного як завгодно малого за нормою $h \in \mathbb{R}^m$ маємо:*

$$\left| f(x+h) - f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} h \right| : |h| \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0.$$

*Для такої функції означимо диференціал функції $f$, що відповідає приросту аргументу $dx$:*

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx.$$

[1] Моріс Рене Фреше (1878–1973) — французький математик. Запровадив поняття метричного простору, повноти, компактності й сепарабельності. Займався теорією ланцюгів Маркова та теорією ймовірностей.

**Зауваження 60.** *Умова Ліпшиця справджується, якщо для будь-якої пари $(t; y) \in U_{\varepsilon M}(t_0; y_0)$ всі часткові похідні*[1] $\partial Y_j / \partial y_k$ *неперервні за $(t, y)$.*

**Доведення.** Для фіксованих $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$, $(t; y)$, $(t; z) \in U_{\varepsilon M}(t_0; y_0)$ розглянемо функцію $f(s) = Y_j(t, y + s(z - y))$ на відрізку $[0; 1]$, де вона диференційовна. Справді, маємо:

$$\Bigg| Y(t, y + (s + \Delta s)(z - y)) - Y(t, y + s(z - y)) -$$

$$- \frac{\partial Y(t, y + s(z - y))}{\partial y} \Delta s(z - y) \Bigg| : |\Delta s(z - y)| \underset{|\Delta s| \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Якщо $\Delta s \to 0$, то відношення

$$\frac{Y_j(t, y + (s + \Delta s)(z - y)) - Y_j(t, y + s(z - y))}{\Delta s}$$

прямує до такого значення:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}(t, y + s(z - y)) \cdot (z_k - y_k),$$

де $y_k$, $z_k$ — координати векторів відповідно $y$ і $z$, $\partial Y_j / \partial y_k$ — *часткова* похідна $j$-ої координати $Y$ за $k$-ою координатою другого аргументу за умови, що інші координати та $t$ — сталі. Згідно з теоремою Лаґранжа, існує таке $s \in (0; 1)$, при якому:

$$Y_j(t, z) - Y_j(t, y) = f(1) - f(0) = \frac{df(s)}{ds} = \frac{dY_j(t, y + s(z - y))}{ds} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k) \ \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}(t, y + s(z - y)).$$

Таким чином, $|Y(t, z) - Y(t, y)|$ не перевищує:

$$|z - y| \max_{j \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}} \sum_{k=1}^{n} \max_{(r; u) \in U_{\varepsilon M}(t_0, y_0)} \left| \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}(r, u)) \right|,$$

а всі максимуми досягаються на замкненій обмеженій множині $U_{\varepsilon M}(t_0, y_0)$ завдяки неперервності часткових похідних $Y$.

[1] Функції $Y(t, y)$ як функції $y$ для сталого $t$.

**Зауваження 61.** *Несправдження умови Ліпшиця (172) може призвести до неєдиності розв'язку задачі Коші.*

Наприклад, рівняння $y'(t) = \sqrt{y(t)}$ з початковою умовою $y(0) = 0$ має розв'язок: $y(t) = 0$. Проте, крім цього розв'язку, існує ще незліченна множина розв'язків:

$$y_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq C; \\ (t-C)^2/2, & t > C > 0. \end{cases}$$

У даному разі маємо:

$$Y(t, y) = \sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{y} - \sqrt{0}}{y - 0} = \frac{1}{\sqrt{y}} \underset{y \to 0+0}{\longrightarrow} +\infty.$$

**Зауваження 62.** *Теорема стверджує лише про існування розв'язків диференціального рівняння для $t$ з околу $t_0$.*

Наприклад, для задачі Коші $y'(t) = y^2(t)$, $y(0) = 1$ розв'язок $y(t) = 1/(1-t)$ визначений лише для $t < 1$, бо

$$\lim_{t \to 1-0} y(t) = +\infty.$$

**Зауваження 63.** *Теорема справджується й у такому разі, коли значення $y$ та $Y$ належать до нескінченно вимірного векторного простору з нормою $|\ |$, для якої справджуються умови теореми. Додатковою вимогою є справдження нерівності (179).*

Доведена теорема про єдиність розв'язку задачі Коші має важливе світоглядне значення. Вона є математичним обґрунтуванням коректності детерміністичного опису навколишнього світу, що передбачає однозначний розвиток системи у майбутньому при відомому її стані в даний момент часу. Самі системи можуть бути доволі різноманітними:

- фізична — система матеріальних точок, для якої станом системи є набір координат цих точок та їхніх швидкостей, а *еволюційне рівняння* (171) отримується на підставі законів класичної механіки й відомих законів взаємодії, наприклад, закону всесвітнього тяжіння;

- хімічна — система рівномірно розподілених у розчині хімічних сполук, для якої станом є значення густин;
- екологічна — "хижак-жертва", для якої станом є чисельність видів.

Зауважимо, що для деяких процесів більш відповідним є такий опис, коли про той чи інший стан системи можна вести мову лише з певною ймовірністю. Однак у результаті *агрегації* — істотного зменшення кількості змінних при збереженні можливості опису найважливіших рис явищ — можна отримати наближений адекватний детерміністичний опис і таких процесів (наприклад, для процесу розпаду радіоактивних елементів).

## 14.3. Задача двох тіл

Розглянемо детально *задачу двох тіл* — проблему опису в інерційній системі координат руху двох матеріальних точок маси $m$ і $M$, взаємодію яких описують за допомогою закону всесвітнього тяжіння. Крім важливого історичного значення, ця задача привертає увагу ще й тим, що знання фізичних законів дає змогу істотно скоротити кількість незалежних змінних — від 12 (2 набори по 3 координати точки та 3 координати швидкостей) до 2. Таким чином, демонструється доволі загальний підхід до спрощення систем диференціальних рівнянь за рахунок використання відомих інтегралів руху — законів збереження. З кожним таким інтегралом пов'язана певна симетрія простору станів системи.

Позначимо через $\vec{r}$ та $\vec{R}$ вектори, спрямовані з початку координат до матеріальних точок маси відповідно $m$ і $M$, через $\vec{r}\,'$ та $\vec{R}'$ — швидкості цих точок, а через $\vec{r}\,''$ та $\vec{R}''$ — прискорення. Тут і надалі позначаємо диференціювання за часом $t$ векторних величин штрихом, а крапкою зверху — *скалярних* (числових). Імпульс замкненої системи двох тіл $m\vec{r}\,'+M\vec{R}'$ — сталий, а її центр мас, розташований у такій точці:

$$\frac{m\vec{r}+M\vec{R}}{m+M},$$

рухається зі сталою швидкістю. Справді, імпульс цієї системи становить $m\vec{r}\,'+M\vec{R}'$, а його похідна $m\vec{r}\,''+M\vec{R}''$ дорівнює сумі сил, що діють у системі. Згідно з третім законом Ньютона, ця сума дорівнює 0, тому імпульс системи сталий. Не обмежуючи загальності міркувань, *розглянемо задачу в інерційній системі з початком координат у центрі мас* у кожний момент часу $t$:

$$m\vec{r}+M\vec{R}=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{R}=-\frac{m\vec{r}}{M} \;\Leftrightarrow\; \vec{r}-\vec{R}=\frac{m+M}{M}\vec{r}, \tag{181}$$

де ліва частина останньої рівності — вектор, спрямований від точки маси $M$ до точки маси $m$. Похідна моменту імпульсу такої системи

$$\vec{L}=m\vec{r}\,'\times\vec{r}+M\vec{R}'\times\vec{R} \tag{182}$$

дорівнює:

$$\vec{L}'=m\vec{r}\,''\times\vec{r}+M\vec{R}''\times\vec{R} \tag{183}$$

(див. подання векторного добутку через координати співмножників, правило диференціювання добутку функцій і властивості векторного добутку). Напрям дії сили тяжіння збігається з напрямом до притягуваного тіла, тобто вектори $\vec{r}-\vec{R}$, $m\vec{r}\,''$ і $M\vec{R}''$ паралельні, і справджуються рівності (181), тому вираз (183) дорівнює нулю, а вираз (182) — сталий. Ще раз враховуючи співвідношення (181), можемо зробити висновок.

*Траєкторії матеріальних точок лежать у площині, що проходить через центр мас системи й перпендикулярна до моменту імпульсу (182).*

Нехай $(r;\varphi)$, $(R;\varphi+\pi)$ — полярні координати матеріальних точок на цій площині, $\hat{r}$, $\hat{R}$ — вектори довжини 1, однаково спрямовані відповідно з $\vec{r}$ і $\vec{R}$. Напрям відліку кутового аргументу виберемо таким чином, щоб останній не спадав при зростанні $t$ в околі 0: $\dot{\varphi}(0)\ge 0$. Шляхом диференціювання за часом $t$ обох частин рівності $\hat{r}\cdot\hat{r}=1$ отримаємо:

$$\hat{r}'\cdot\hat{r}=0 \;\Rightarrow\; \hat{r}\perp\hat{r},$$

причому вектори $\hat{r}$ і $\hat{r}'$ належать до площини руху точок.

$|\hat{r}(t+\Delta t)-\hat{r}(t)|$ — довжина хорди, що стягує дугу кола з радіусом 1 і центральним кутом $|\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)|$ (див. рис. 89). Таким чином, маємо:

$$|\hat{r}(t+\Delta t)-\hat{r}(t)|=2\sin\frac{1}{2}|\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)|.$$

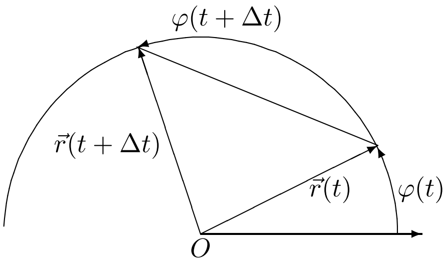



*Рис. 89.* До виведення рівності $|\hat{r}'|{=}|\dot{\varphi}|$.

Поділивши обидві частини останньої рівності на $\Delta t$ і здійснивши граничний перехід $\Delta t \to 0$, отримаємо таку рівність: $|\hat{r}'| = |\dot{\varphi}|$.

Тоді матимемо:

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r} \;\Rightarrow\; \vec{r}\,' = \dot{r} \cdot \hat{r} + r \cdot \hat{r}' \;\Rightarrow\; |\vec{r}\,'|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Анологічні твердження справджуються і для $\vec{R}$ — достатньо замінити літеру $r$ на $R$ у відповідних співвідношеннях. Абсолютна величина моменту імпульсу системи стала й дорівнює:

$$\begin{aligned} L &= |mr\hat{r}' \times \vec{r} + MR\hat{R}' \times \vec{R}| = (mr^2 + MR^2)\dot{\varphi} = \\ &= m\left(1 + \frac{m}{M}\right) r^2\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{184}$$

Позначимо так:

$$\tilde{m} = m\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Тоді *повна енергія системи* дорівнює:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(m(\vec{r}\,')^2 + M(\vec{R}')^2\right) + U = \\ &= \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + M\dot{R}^2 + MR^2\dot{\varphi}^2\right) + U = \\ &= \frac{1}{2}\left(m\left(1 + \frac{m}{M}\right)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)\right) + U = \frac{\tilde{m}\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\tilde{m}r^2} + U, \end{aligned}$$

де використано таке позначення:

$$U = -\gamma\frac{mM}{|\vec{r} - \vec{R}|} = -\gamma\frac{mM^2}{(m+M)r} = -\frac{\alpha}{r} \quad - \tag{185}$$

для потенціальної енергії ($\gamma$ — *гравітаційна стала*).

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial \vec{R}} d\vec{R} = -\vec{f} \cdot d\vec{r} - \vec{F} \cdot d\vec{R}.$$

$-\partial U/\partial \vec{r}$ — вектор-рядок, елементи якого є координатами вектори сили $\vec{f}$, що діє на тіло маси $m$ у точці $\vec{r}$. Згідно з другим законом Ньютона, цей вектор дорівнює $m\vec{r}\,''$.

$-\partial U/\partial \vec{R} = \partial U/\partial \vec{r}$ — вектор-рядок, елементи якого є координатами вектори сили $\vec{F}$, що діє на тіло маси $M$ у точці $\vec{R}$. Згідно з другим законом Ньютона, цей вектор дорівнює $M\vec{R}''$.

$$\dot{E} = m\vec{r}\,'' \cdot \vec{r}\,' + M\vec{R}'' \cdot \vec{R}' + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\ \vec{r}\,' + \frac{\partial U}{\partial \vec{R}}\ \vec{R}' = 0.$$

Отже, повна енергія системи $E$ — стала величина.

**Зауваження 64.** *Небесні тіла — зорі, планети — далеко не матеріальні точки з людської точки зору. Ньютон не відразу знайшов строге доведення того, що поле тяжіння ізотропно розподіленої у кулі речовини*[1] *зовні кулі таке саме, як у матеріальної точки тієї самої маси, розташованої у центрі кулі. Стисле доведення цього твердження використовує інтегрування щодо орієнтованих поверхонь, і ми не будемо його розглядати.*

## 14.4. Рух у центральному полі

Міркування, аналогічні до попередніх, можна провести і для задачі про рух *однієї* матеріальної точки маси $m$ у *центральному полі,* в якому потенціальна енергія $U$ залежить тільки від відстані $r$ до центра — початку координат інерційної системи. У даному разі $\vec{r}\,''||\vec{r}$, тому момент імпульсу $m\vec{r}\,'\times\vec{r}$ — сталий. Отже, рух здійснюється в одній площині. Остаточними диференціальними рівняннями будуть:

$$L = mr^2\dot{\varphi}; \tag{186}$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \tag{187}$$

[1] Коли густина залежить лише від відстані до центра кулі.

Таким чином, задача про взаємодію двох матеріальних точок з точністю до позначень еквівалентна задачі про рух у центральному полі однієї точки. Розглянемо випадок $L \neq 0$, коли нема падіння на центр. З рівняння (187) маємо:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right) = \frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2},$$

звідси:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} \ \Leftrightarrow \ t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}.$$

З рівняння (186) маємо:

$$\varphi = \int \dot{\varphi}\ dt = \int \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}. \qquad (188)$$

Обчислимо знайдений вираз (188) для випадку гравітаційної чи електростатичної взаємодії: $U(r) = -\alpha/r$. Використовуючи позначення:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha m}}, \qquad p = \frac{L^2}{\alpha m},$$

маємо:

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} = -\frac{d\left(\frac{L}{mr}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m} + 2 \cdot \frac{\alpha}{L} \cdot \frac{L}{mr} - \frac{L^2}{m^2r^2}}} =$$

$$= -\frac{d\left(\frac{L}{mr}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{\alpha^2}{L^2} - \left(\frac{L}{mr} - \frac{\alpha}{L}\right)^2}} = -\frac{d\left(\frac{L}{mr} - \frac{\alpha}{L}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\alpha\varepsilon}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{mr} - \frac{\alpha}{L}\right)^2}} =$$

$$= d\,\arccos\left(\frac{L}{\alpha\varepsilon} \cdot \left(\frac{L}{mr} - \frac{\alpha}{L}\right)\right) = d\,\arccos\left(\frac{p}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Не обмежуючи загальності міркувань, виберемо вісь полярної системи координат таким чином, щоб

$$\cos\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{p}{r} - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi \ \Leftrightarrow \qquad (189)$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{p}{\varepsilon} = \frac{r}{\varepsilon} + r\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \frac{r}{-r\cos\varphi + p/\varepsilon}.$$

В останній рівності знаменник правої частини — відстань від точки з полярними координатами $(r; \varphi)$ до прямої, що знаходиться на відстані $p/\varepsilon$ від початку координат і перпендикулярна до полярної осі (див. рис. 90). Інакше кажучи, рівняння (189) відносно $(r; \varphi)$ — рівняння кривої 2-го порядку з фокусом у початку координат: еліпса, параболи чи гіперболи залежно від величини ексцентриситету $\varepsilon$, тобто від знака $E$.

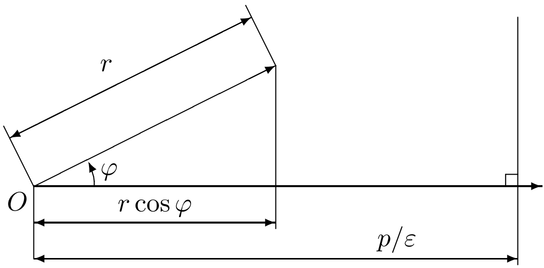



*Рис. 90.* Виведення рівняння кривої 2-го порядку в полярній системі координат.

**I закон Кеплера**[1]**.** *Кожна планета Сонячної системи обертається по еліпсу, в одному з фокусів якого — Сонце.*

Справді, траєкторія планети — обмежена крива. З кривих 2-го порядку такою є лише еліпс.

**Означення 131.** *Секторна швидкість — швидкість приросту площі сектора (криволінійного трикутника) з основою — траєкторією матеріальної точки — і бічними сторонами — фокальними радіусами, що з'єднують початок і кінець траєкторії з початком координат.*

$\frac{1}{2}r(t) \cdot r(t + \Delta t) \cdot \sin(\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t))$ — площа заштрихованого трикутника на рис. 91. Її відношення до приросту часу $\Delta t$ прямує до $r^2\dot{\varphi}/2$, якщо $\Delta t \to 0$.

**II закон Кеплера.** *Радіус-вектор від Сонця до планети Сонячної системи за однакові проміжки часу описує рівні площі.* Інак-

[1]Йоган Кеплер (1571–1630) — видатний німецький вчений, який встановив закони руху планет навколо Сонця, вивчаючи рух Марса.

ше кажучи, *планети рухаються зі сталою секторною швидкістю* $r^2\dot{\varphi}/2$ (див. рівності (184–186) і рис. 91).

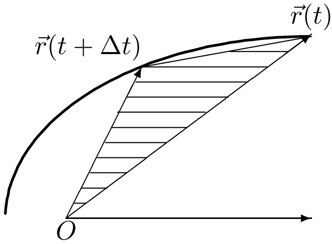



*Рис. 91.* Обчислення секторної швидкості $r^2\dot{\varphi}/2$.

Якщо справджуються такі нерівності: $\varepsilon < 1 \ \Leftrightarrow\ E < 0$, то рух, згідно з (189), здійснюється по еліпсу. Нехай $a$, $b$, $c$ — відповідно його велика й мала півосі та половина відстані між фокусами. Тоді відстань між фокусом та відповідною директрисою дорівнює:

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} - c = a\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right) = a\ \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \ \Rightarrow\ a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}.$$

Тоді маємо:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{ap}.$$

Еліпс з довжинами півосей $a$ та $b$ можна отримати з кола, радіус якого дорівнює $a$, стисканням в $b/a$ разів уздовж одного з напрямів. Наприклад, проектуючи коло на площину, що утворює кут $\arccos(b/a)$ з площиною кола. Площа еліпса дорівнює:

$$\pi ab = T\cdot\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = T\cdot\frac{L}{2m},$$

де $T$ — період обертання. Таким чином, маємо:

$$T = \frac{2\pi mab}{L} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}.$$

**III закон Кеплера.** *Квадрати зоряних періодів обертання планет співвідносяться як куби великих півосей їхніх орбіт.*

Розв'язуючи задачу наближеного опису руху планет Сонячної системи у гравітаційному полі Сонця, можемо вважати Сонце нерухомим центром, рух планет — рухом у центральному полі за умови, що $m/\alpha$ — величина, обернена до добутку маси Сонця на гравітаційну сталу. Припущення про незначну міжпланетну взаємодію порівняно з дією Сонця справджується для більшості планет. Відхилення Урану від обрахованої траєкторії навело Левер'є (у Франції) та Адамса (в Англії) на думку про існування невідомої тоді планети. Вчені майже одночасно обчислили орбіту невідомої планети, її масу. В 1846 р. цю невидиму неозброєним оком планету побачили у телескоп і назвали Нептуном.

## 14.5. Лінійні однорідні рівняння

**Означення 132.** *Якщо $A$ — стала матриця розміру $N \times N$, то рівняння відносно невідомої функції $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$*

$$y' = Ay, \qquad y(t_0) = y_0 \quad — \tag{190}$$

*система $N$ однорідних лінійних звичайних диференціальних рівнянь*[1] *зі сталими коефіцієнтами і початковим значенням $y_0$.*

Якщо запровадити у $\mathbb{R}^N$ норму $|y| = \max(y_1, y_2, y_3, \ \dots \ , y_N)$, а у просторі матриць квадратних матриць розміру $N \times N$ норму:

$$|A| = \max_{j \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ N\}} \sum_{k=1}^{N} |a_{jk}|,$$

то ці норми *узгоджені* в тому розумінні, що

$$|Ay| \leq |A| \cdot |y|.$$

Переконайтеся самостійно в тому, що $|A|$ є нормою, справджується остання нерівність, і маємо: $|AB| \leq |A| \cdot |B|$.

Не обмежуючи загальності міркувань, вважатимемо, що $t_0 = 0$. Згідно з теоремою 127, розв'язок рівняння (190) єдиний, і його можна знайти методом послідовних наближень.

[1] Відносно координат $y$.

Запровадимо такі позначення:

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(t) &= y_0;\\
y^{(1)}(t) &= y_0 + \int\limits_0^t Ay^{(0)}(s)\ ds = y_0 + tAy_0 = (1+tA)y_0;\\
y^{(2)}(t) &= y_0 + \int\limits_0^t Ay^{(1)}(s)\ ds = y_0 + \int\limits_0^t (A+tA^2)y_0\ ds\ =\\
&= \left(1 + tA + \frac{(tA)^2}{2}\right)y_0;\ \ldots\\
y^{(n)}(t) &= y_0 + \int\limits_0^t Ay^{(n-1)}(s)\ ds\ =\\
&= \left(1 + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tA)^n}{n!}\right)y_0,
\end{aligned}$$

де останній вираз має границю за умови $n \to +\infty$ для всіх $y_0$. В тому числі і для тих, одна з координат яких дорівнює 1, а решта — 0. Ось чому ряд матриць, що позначають так:

$$e^{tA} = \exp(tA) = 1 + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots,$$

збіжний для довільного дійсного $t$, а розв'язок задачі (190) можна подати у такому вигляді:

$$y(t) = e^{tA}y_0. \tag{191}$$

**Лема 11.** *Для довільного натурального $n$ і квадратних матриць $A$ і $C$ одного розміру, з яких $C$ невироджена, маємо:*

$$(CAC^{-1})^n = CA^nC^{-1}. \tag{192}$$

**Доведення** (методом математичної індукції). Твердження леми для $n = 1$ очевидне. Нехай рівність (192) справджується для певного $n$. Тоді матимемо:

$$(CAC^{-1})^{n+1} = (CAC^{-1})^n CAC^{-1} = CA^n(C^{-1}C)AC^{-1} = CA^{n+1}C^{-1}.$$

**Лема 12.** *Для квадратних матриць одного розміру $A$ і $B$ маємо:*

$$AB = BA \;\Rightarrow\; e^{A+B} = e^A\, e^B = e^B\, e^A.$$

**Доведення.** Якщо $AB = BA$, то для обчислення $(A+B)^n/n!$ можна скористатися біномною формулою Ньютона. Тоді маємо:

$$\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{A^j}{j!} \cdot \frac{B^{n-j}}{(n-j)!}.$$

Різниця

$$\sum_{j=0}^{2n} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=0}^{2n} \frac{B^k}{k!} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(A+B)^j}{j!} \tag{193}$$

містить доданки $A^j B^k / j!\, k!$, де $n < j \leq 2n$ або $n < k \leq 2n$, тому її норма не перевищує:

$$e^{|A|} \max_{n<j<+\infty} \frac{|B|^j}{j!} + e^{|B|} \max_{n<j<+\infty} \frac{|A|^j}{j!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Здійснивши граничний перехід $n \to +\infty$ у виразі (193), що прямує до 0, отримаємо твердження леми.

З доведених лем, рівності (162) та властивостей (167–169) матриць $I_l$ випливає подане нижче твердження.

**Теорема 128.** *Якщо $C$ — невироджена квадратна матриця,*

$$A = C\ \mathrm{diag}(\lambda_1 + I_1,\ \lambda_2 + I_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_L + I_L)\ C^{-1},$$

*де $I_l$, $l$=1, 2, ... , $L$, має вигляд (167), то:*

$$e^{tA} = C\ \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1} e^{tI_1},\ e^{t\lambda_2} e^{tI_2}, \cdots, e^{t\lambda_L} e^{tI_L})\ C^{-1},$$

*де квадратна матриця $e^{tI_l}$ того самого розміру, що й $I_l$ $(l = 1,$ ... ,* *L), має такий вигляд:*

$$e^{tI_l} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} & \frac{t^5}{5!} & \frac{t^6}{6!} & \frac{t^7}{7!} & \cdots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} & \frac{t^5}{5!} & \frac{t^6}{6!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} & \frac{t^5}{5!} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^4}{4!} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

**Наслідок 34.** *З можливості подання матриці $A$ нормальною формою Жордана випливає, що координати вектора $e^{tA}y_0$ — розв'язку задачі Коші (190) — сума доданків такого вигляду:*

$$e^{\nu t}(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t))\ p(t),$$

*що відповідають певному блоку нормальної форми Жордана матриці $A$ з числом $\nu + i\omega$ на діагоналі, причому степінь многочлена $p(t)$ менший від розміру блоку на діагоналі нормальної форми Жордана матриці $A$ з числом $\nu + i\omega$ на діагоналі.*

## 14.6. Гармонійні коливання

Розглянемо рівняння

$$x'' = -\omega^2 x, \tag{194}$$

що описує в часі зміщення $x(t)$ тягарця на пружині, сила дії якої пропорційна до відхилення від положення рівноваги. Можна одразу вказати розв'язок задачі Коші з початковими значеннями $x_0(t) = x_0$, $x'(0) = x'_0$:

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t.$$

Він єдиний, згідно з доведеною теоремою 127. Покажемо, як цей розв'язок отримати методом послідовних наближень "без вгадування". Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді рівняння (194) еквівалентне рівнянню $y' = Ay$, що має розв'язок $y(t) = e^{tA}y(0)$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} = -\omega^2,$$

тому для довільного невід'ємного цілого $n \quad A^{4n} = \omega^{4n}$,

$$A^{4n+1} = \omega^{4n}A, \qquad A^{4n+2} = -\omega^{4n+2}, \qquad A^{4n+3} = -\omega^{4n+2}A.$$

Знайдемо $e^{tA}_{11}$ та $e^{tA}_{12}$ — елементи першого рядка матриці $e^{tA}$.

$$\begin{aligned} e^{tA}_{11} &= 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \frac{(\omega t)^8}{8!} - \cdots = \cos\omega t, \\ e^{tA}_{12} &= \frac{t}{1!} - \frac{\omega^2 t^3}{3!} + \frac{\omega^4 t}{5!} - \frac{\omega^6 t^7}{7!} + \frac{\omega^8 t^9}{9!} - \cdots = \\ &= \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega t}{1!} - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{\sin\omega t}{\omega}. \end{aligned}$$

Перша координата $e^{tA}y(0)$ дорівнює:

$$e^{tA}_{11}x(0) + e^{tA}_{12}x'(0) = x(0)\cos\omega t + \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t.$$

Обчислимо $e^{tA}$, використовуючи нормальну форму Жордана матриці $A$. Позначимо:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1/i\omega \\ 1 & -1/i\omega \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо:

$$C\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} C^{-1} = \frac{1}{2}C\begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

де спочатку виконувалась дія множення на $C^{-1}$ справа. Тому маємо:

$$e^{tA} = C \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{i\omega t}/i\omega \\ e^{-i\omega t} & -e^{-i\omega t}/i\omega \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) & \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ -\frac{\omega}{i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) & (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix},$$

де спочатку виконувалась дія множення на $C^{-1}$.

## 14.7. Лінійні неоднорідні рівняння

**Означення 133.** *Якщо $A$ — стала матриця розміру $N \times N$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ — функція дійсного аргументу $t$, то рівняння відносно невідомої функції $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$:*

$$y'(t) = Ay(t) + f(t) \quad — \tag{195}$$

*система лінійних неоднорідних рівнянь*[1] *зі сталими коефіцієнтами.*

**Теорема 129.** *Задача Коші для рівняння (195) з неперевною функцією $f(t)$ і початковою умовою $y(0) = y_0$ має єдиний розв'язок:*

$$y(t) = e^{tA}y(0) + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds, \tag{196}$$

*який можна отримати методом послідовних наближень.*

**Доведення.** У рівності (196) перший доданок правої частини забезпечує потрібні початкові значення і є розв'язком однорідного рівняння $y' = Ay$. Другий має нульові початкові умови й залежить від $t$ як від границі інтегрування і як від параметра підінтегральної функції.

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \int\limits_0^{t+\Delta t} e^{(t+\Delta t-s)A} f(s)\, ds - \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds \right) =$$

[1] Відносно координат $y$.

$$= \frac{1}{\Delta t} \left( \int\limits_t^{t+\Delta t} e^{(t+\Delta t - s)A} f(s)\, ds + \int\limits_0^t \left( e^{(t+\Delta t - s)A} - e^{(t-s)A} \right) f(s)\, ds \right) =$$

$$= e^{\Delta t A} \cdot \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds + \frac{e^{\Delta t A} - 1}{\Delta t} \cdot \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds.$$

Здійснивши граничний перехід $\Delta t \to 0$ з використанням теореми про середнє значення інтеграла неперервної функції (для кожної координати першого доданка окремо), отримаємо:

$$f(t) + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds.$$

Існує ще один спосіб розв'язування задачі Коші для лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь: до довільного розв'язку *неоднорідного* рівняння додати такий розв'язок *однорідного* рівняння, щоб у цієї суми справджувалися початкові умови. Саме так далі розв'язано задачу про вимушені коливання в електричному колі.

## 14.8. Ізольований контур

Розглянемо електричне коло послідовно з'єднаних конденсатора ємності $C$, опору $R$ та індуктивності $L$ (величини всіх параметрів додатні). Позначимо через $Q$ заряд на обкладинках конденсатора, $I$ — струм в напрямку від позитивно зарядженої обкладинки до негативно зарядженої (див. рис. 92).

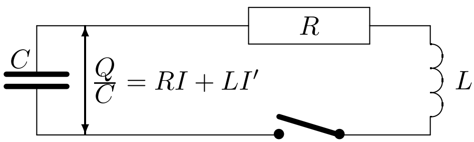



*Рис. 92.* Електрична схема ізольованого контура з опором $R$, ємністю $C$ та індуктивністю $L$.

При такому напрямку вимірювання струму маємо:

$$I = -Q', \tag{197}$$

де штрихом $'$ позначено диференціювання за часом $t$. $Q/C$ — напруга на обкладинках конденсатора — дорівнює сумі спадів напруги на опорі $R$ та індуктивності $L$:

$$\frac{Q}{C} = RI + LI'. \tag{198}$$

Позначимо через $Q_0$ та $I_0$ — значення заряду $Q$ та струму $I$ у початковий момент $t = 0$. Підставивши значення $I$ з рівняння (197) в рівняння (198), перенісши всі доданки у ліву частину рівняння та помноживши їх на $C$, отримаємо:

$$LCQ'' + RCQ' + Q = 0. \tag{199}$$

$Q = \mathrm{Re}\ Q_0 e^{\lambda t}$, де $\lambda$ — деяке комплексне число, буде розв'язком рівняння (199), якщо рівність

$$\mathrm{Re}\ Q_0 e^{\lambda t}(LC\lambda^2 + RC\lambda + 1) = 0$$

справджується для всіх дійсних $t$, тобто

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0 \tag{200}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Можливі такі три випадки (див. рис. 93).

**1. Жорстке гасіння.** Якщо

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC},$$

то рівняння (200) має два різних дійсних корені $\lambda_1$ і $\lambda_2$. Тоді розв'язок системи (197–198) можна подати у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} & + & a_2 e^{\lambda_2 t} \\ a_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} & + & a_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

що для $t = 0$ перетворюється на таку рівність:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ I_0 \end{pmatrix},$$

звідси маємо:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 Q_0 + I_0 \\ -\lambda_1 Q_0 - I_0 \end{pmatrix}.$$

**2. Критичне гасіння.** Якщо

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC},$$

то рівняння (200) має один дійсний корінь $\lambda = -R/2L$ кратності 2. У даному разі розв'язок системи (197–198) для забезпечення справдження початкових умов можна подати у такому вигляді:

$$Q = (a_0 + a_1 t)e^{\lambda t}, \qquad -I = Q' = (\lambda(a_0 + a_1 t) + a_1)e^{\lambda t},$$

де $a_0 = Q_0$, $a_1 = -I_0 - \lambda Q_0$.

**3. М'яке гасіння.** Якщо

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC},$$

то рівняння (200) має два взаємно спряжених корені. Нехай

$$\rho = \frac{R}{2L}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \qquad \lambda = -\rho + i\omega \quad -$$

один з розв'язків рівняння (200), а комплексне число $A$ таке, при якому:

$$Q = \mathrm{Re}\ Ae^{\lambda t}, \qquad -I = Q' = \mathrm{Re}\ A\lambda e^{\lambda t}.$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ A &= Q_0, \\
I_0 &= \mathrm{Re}\ A \cdot \mathrm{Re}\ \lambda - \mathrm{Im}\ A \cdot \mathrm{Im}\ \lambda = -\rho Q_0 - \omega \cdot \mathrm{Im}\ A, \\
\mathrm{Im}\ A &= \frac{I_0 - \rho Q_0}{\omega}, \\
Q &= \left(Q_0 \cos\omega t - \frac{I_0 - \rho Q_0}{\omega} \sin\omega t\right) e^{-\rho t}.
\end{aligned}$$

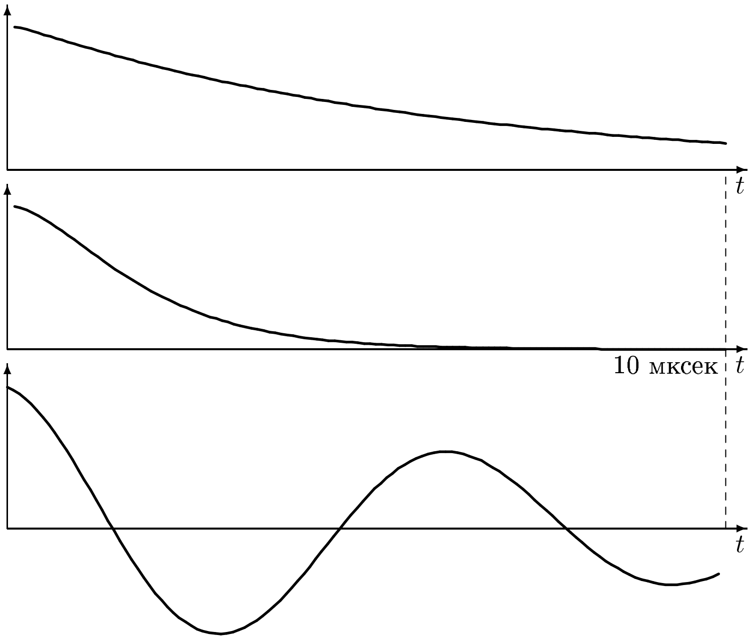



*Рис. 93.* Залежність величини заряду від часу $t$ з моменту замикання кола з ємністю $C = 10^{-8}$ ф, індуктивністю $L = 10^{-4}$ гн та опором $R$ (перераховано в порядку розташування графіків зверху вниз):

600 ом — $\lambda = (-3 \pm 2\sqrt{2}) \cdot 10^6$ сек$^{-1}$ — жорстке гасіння;
200 ом — $\lambda = 10^6$ сек$^{-1}$ — критичне гасіння;
20 ом — $\lambda = (-1 \pm i\sqrt{99}) \cdot 10^5$ сек$^{-1}$ — м'яке гасіння.

## 14.9. Контур з джерелом змінної напруги

Розглянемо електричне коло послідовно з'єднаних конденсатора ємності $C$, опору $R$, індуктивності $L$ та джерела змінної напруги (див. рис. 94):

$$U_{\sim} = U_{\max} \cos(\omega t + \varphi),$$

де $U_{\max}$ — максимальне значення напруги на полюсах джерела напруги, $\omega$ — циклічна частота коливань напруги, $\varphi$ — фаза (зміст цих параметрів розкривається в курсі електротехніки).

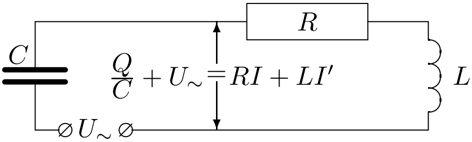



*Рис. 94.* Електрична схема контура з опором $R$, ємністю $C$, індуктивністю $L$ та джерелом змінної напруги $U_\sim$.

Дотримуючись позначень, запроваджених при розгляді ізольованого контура, маємо:

$$I = -Q', \qquad LCQ'' + RCQ' + Q + CU_\sim = 0. \tag{201}$$

Ці рівняння описують вимушені коливання заряду на обкладинках конденсатора і струму в електричному колі. Коло має опір, що гасить власні коливання. Тому природно сподіватися, що за умови $t \to +\infty$ вимушені коливання мають ті самі період і форму, що й коливання напруги $U_\sim$, і задаються, наприклад, функцією:

$$Q(t) = -Q_{\max}\sin(\omega t + \varphi + \Delta\varphi), \tag{202}$$

де $Q_{\max}$ — найбільше значення заряду, $\Delta\varphi$ — деякий кут, фізичний зміст якого буде з'ясовано далі. Тоді маємо:

$$\begin{aligned}
Q &= -Q_{\max}\sin(\omega t + \varphi + \Delta\varphi) = \\
&= -Q_{\max}(\sin(\omega t + \varphi)\cos\Delta\varphi + \cos(\omega t + \varphi)\sin\Delta\varphi); \\
Q' &= -\omega Q_{\max}\cos(\omega t + \varphi + \Delta\varphi) = \\
&= -\omega Q_{\max}(\cos(\omega t + \varphi)\cos\Delta\varphi - \sin(\omega t + \varphi)\sin\Delta\varphi); \\
Q'' &= \omega^2 Q_{\max}\sin(\omega t + \varphi + \Delta\varphi) = \\
&= \omega^2 Q_{\max}(\sin(\omega t + \varphi)\cos\Delta\varphi + \cos(\omega t + \varphi)\sin\Delta\varphi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((\omega^2 LC - 1)\sin\Delta\varphi - \omega RC\cos\Delta\varphi)Q_{\max} + CU_{\max})\cdot\cos(\omega t + \varphi) + \\
&\quad +((\omega^2 LC - 1)\cos\Delta\varphi + \omega RC\sin\Delta\varphi)\cdot Q_{\max}\sin(\omega t + \varphi) \quad —
\end{aligned}$$

ліва частина рівняння:

$$LCQ'' + RCQ' + Q + CU_\sim = 0 \quad —$$

тотожно дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли справджується така система рівнянь:

$$\begin{cases} ((\omega^2 LC - 1)\sin\Delta\varphi - \omega RC\cos\Delta\varphi)Q_{\max} + CU_{\max} = 0 \\ (1-\omega^2 LC)\cos\Delta\varphi = \omega RC\sin\Delta\varphi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{tg}\ \Delta\varphi = \frac{\sin\ \Delta\varphi}{\cos\ \Delta\varphi} = \frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC} = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}.$$

Виберемо:

$$\Delta\varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC}.$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= \frac{CU_{\max}}{(1-\omega^2 LC)\sin\Delta\varphi + \omega RC\cos\Delta\varphi} = \\ &= \frac{1}{\cos\Delta\varphi}\cdot\frac{CU_{\max}}{(1-\omega^2 LC)\ \mathrm{tg}\ \Delta\varphi + \omega RC}, \end{aligned}$$

де

$$\frac{1}{\cos\Delta\varphi} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\Delta\varphi} = \frac{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}{\omega RC},$$

$$(1-\omega^2 LC)\ \mathrm{tg}\ \Delta\varphi + \omega RC = \frac{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}{\omega RC}.$$

У результаті маємо:

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= \frac{CU_{\max}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}; \\ \omega Q_{\max} &= \frac{\omega CU_{\max}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{(\omega L - 1/\omega C)^2 + R^2}} \quad - \end{aligned}$$

амплітуда коливань струму в колі. Вона найбільша за умови, що $\omega = \omega_0$, де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — *резонансна частота коливань* (див. рис. 95).

Кут $\Delta\varphi$ має прозоре тлумачення — *кут випередження коливань струму в колі коливань напруги* $U_\sim$.

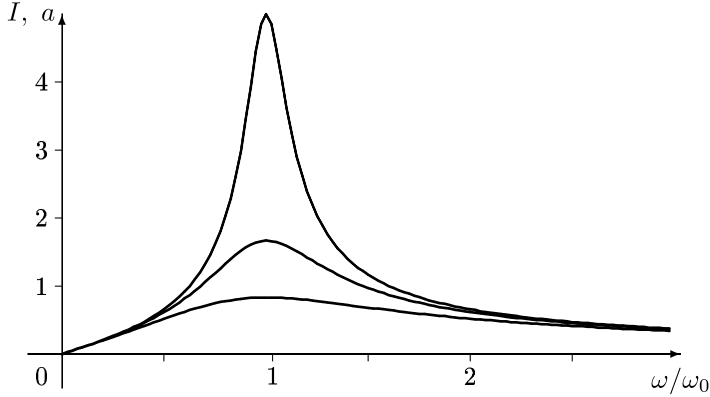



*Рис. 95.* Залежність амплітуди струму від циклічної частоти коливань електрорушійної сили 100 в у колі послідовно з'єднаних індуктивності $L = 10^{-4}$ Гн, ємності $C = 10^{-8}$ Ф та опору $R$ (подано криві для опорів 20, 60 і 120 Ом, якщо рахувати зверху донизу). $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^6$ рад/сек — резонансна частота.

Знайдемо *спад напруги* на опорі, ємності та індуктивності *за напрямом струму* — за годинниковою стрілкою на електричній схемі — від однієї клеми джерела напруги до іншої.

Спад напруги на опорі, який коливається синхронно зі струмом, такий:

$$RI = \omega R Q_{\max} \cos(\omega t + \varphi + \Delta\varphi).$$

Спад напруги на ємності, який відстає від коливань струму на $\pi/2$, такий:

$$-\frac{Q}{C} = \frac{Q_{\max}}{C}\sin(\omega t + \varphi + \Delta\varphi) = \frac{Q_{\max}}{C}\cos(\omega t + \varphi + \Delta\varphi - \pi/2).$$

Спад напруги на індуктивності, який випереджає коливання струму на $\pi/2$, такий:

$$\begin{aligned} LI' &= -\omega^2 L Q_{\max} \sin(\omega t + \varphi + \Delta\varphi) = \\ &= \omega^2 L Q_{\max} \cos\left(\omega t + \varphi + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Запишемо стисло отримані результати за допомогою комплексних чисел. Позначимо:

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C},$$

$$U_C = U_{\max} e^{i(\omega t+\varphi)}, \qquad I_C = \omega Q_{\max} e^{i(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)}.$$

Тоді маємо:

$$U_C = Z I_C \qquad U_\sim = \mathrm{Re}\ U_C, \qquad I = \mathrm{Re}\ I_C.$$

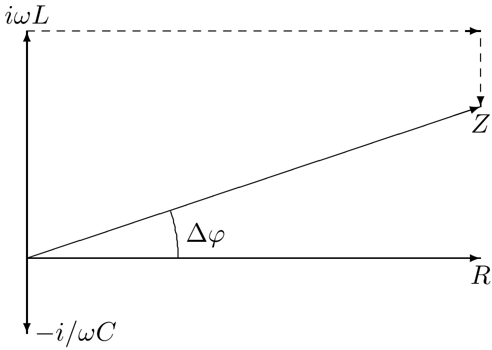



*Рис. 96.* Знаходження *імпендансу* $Z = R + i\omega L - i/\omega C$. Кут випередження коливань $\Delta\varphi$ вимірюється від напряму $Z$ до напряму $R$ і для зображеного випадку — від'ємний.

**Зауваження 65.** *Розв'язок задачі Коші з початковими значеннями заряду $Q_0$ і струму $I_0$ — сума знайденого розв'язку (202) і розв'язку задачі Коші для системи рівнянь (197–198) електричного кола без джерела напруги з початковими значеннями:*

$$Q_0 + Q_{\max} \sin(\varphi + \Delta\varphi), \qquad I_0 - \omega Q_{\max} \cos(\varphi + \Delta\varphi) \quad -$$

*відповідно до заряду конденсатора і струму в колі.*

# Розділ 15. Теорія ймовірностей

У попередньому розділі ми ознайомилися з прикладами детерміністичного опису світу — побудови еволюційної моделі (системи диференціальних рівнянь), що однозначно описує всі виділені властивості об'єктів або їхньої системи, які ми досліджуємо. Однак цей підхід непродуктивний у вказаних нижче випадках.

1. *Повна* інформація про стан системи недосяжна. Наприклад:

   а) невідомий точний опис руху грального кубика в результаті його підкидання, взаємодії з молекулами повітря й поверхнею столу;

   б) невідомі *точні* координати в моделях класичної механіки (дослід Резерфорда з розсіювання заряджених $\alpha$-частинок ядрами золота й аналіз результатів цього експерименту суттєво змінив погляд на будову речовини);

   в) невідомо, скільки зерен урожаю дасть *кожний* колос пшеничного поля (прогноз щодо запасів продовольства — питання державної ваги);

   г) невідомо, як *кожний* виборець поведе себе у день виборів (боротьба за владу й ефективність фінансування такої боротьби цікавить всі верстви суспільства);

   ґ) невідомі *всі* зміни в організмі пацієнта, викликані хворобою, що потребує оперативного втручання.

   При цьому спостерігача насправді цікавить не стан системи в кожний момент часу, а деякі характерстики цього стану. Для поданих прикладів це відповідно:

   а) кількість очок, що випали на гральному кубику;

   б) залежність кількості частинок від кута розсіювання;

   в) середня та мінімальна врожайність;

   г) розподіл симпатій серед виборців;

   ґ) результат операції для пацієнта.

2. Неможливість навіть з допомогою сучасного програмного й апаратного забезпечення в *уявних* експериментах отримати *вичерпний* опис системи. Наприклад, при моделюванні газоподібного чи рідкого стану за допомогою сукупності $10^{23}$ твердих сфер, що не стискаються і взаємодіють між собою та з границею системи лише в результаті пружних ударів. Через це виникає потреба в новому підході, реалізованому в статистичній фізиці.

У всіх перелічених випадках переходять до опису навколишнього світу за допомогою ймовірнісного простору випадкових подій. При цьому кожна подія має свою *ймовірність* — дійсне число з відрізка [0;1]. Зміст цієї величини такий (*закон великих чисел*): *імовірність події — границя відношення кількості*[1] *незалежних випробовувань, у яких подія відбулася, до кількості всіх незалежних випробовувань за умови, що остання прямує до нескінченності.* При цьому поняття випробування визначається сферою застосування математичної теорії (опис фізичних, хімічних, біологічних і соціальних явищ, дефектологія), а інтуїтивному розумінню незалежності випробувань (експериментів) відповідає подане далі поняття незалежності однаково розподілених подій.

Фундаментальні питання ймовірнісного опису:

- коректність, тобто несуперечливість опису ймовірнісного простору випадкових подій за домомогою відомих математичних понять;

- адекватність, тобто відповідність прогнозів реальності —

формують предмет вивчення окремих галузей математики — теорії ймовірностей і математичної статистики.

## 15.1. Аксіоми теорії ймовірностей

У теорії ймовірностей розглядають *стохастичні експерименти*, які можна повторити будь-яку кількість разів, але результати

[1] Таке відношення називають *статистичною ймовірностю.*

яких не можна напевне передбачити. З кожним стохастичним експериментом пов'язують *простір елементарних подій*, який прийнято позначати великою літерою грецької абетки $\Omega$ (потрібно читати "омега") — сукупність всіх можливих наслідків (результатів експерименту (простір наслідків експерименту). *Випадкові події*, пов'язані з даним стохастичним експериментом, — підмножини простору елементарних подій $\Omega$ (див. табл. 9).

*Таблиця 9*

Відповідність понять теорії множин і теорії ймовірностей

| Теорія множин | | Теорія ймовірностей |
|---|---|---|
| універсальна множина | $\boxed{\Omega}$ | *простір елементарних подій*, *достовірна подія* — подія, яка відбувається при кожному здійсненні експерименту |
| порожня множина | $\boxed{\emptyset}$ | *неможлива подія* — подія, яка не відбувається при будь-якому здійсненні експерименту |
| $A$ — підмножина $B$ | $\boxed{A \subset B}$ | з події $A$ випливає подія $B$ |
| об'єднання множин $A$ і $B$ | $\boxed{A \cup B}$ | подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій $A$ або $B$ |
| перетин множин $A$ і $B$ | $\boxed{A \cap B}$ | подія, яка полягає в тому, що відбуваються обидві події $A, B$ |
| доповнення множини $A$ до $\Omega$ | $\boxed{\bar{A} = \Omega \backslash A}$ | протилежна подія до $A$, тобто подія, яка полягає в тому, що $A$ не відбувається |
| множини $A$ і $B$ не перетинаються | $\boxed{A \cap B = \emptyset}$ | події $A$ і $B$ несумісні |
| різниця множин $A$ і $B$ | $\boxed{A \backslash B}$ | різниця подій $A$ і $B$ — подія, яка полягає в тому, що відбудеться $A$ і не відбудеться $B$ |

**Означення 134.** *Ймовірнісним простором називають трійку* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, *де:*

$\Omega$ — *деяка множина, яку називають простором елементарних подій, а всі її елементи — елементарними подіями;*

$\mathfrak{A}$ — *певна сукупність підмножин* $\Omega$, *які називають подіями (використано велику літеру готичної абетки* $\mathfrak{A}$, *потрібно читати "A").* $\mathfrak{A}$ *називають* $\sigma$*-алгеброю подій (використано малу літеру грецької абетки* $\sigma$, *потрібно читати "сигма"), і вона має такі властивості:*

- *простір елементарних подій є подією, тобто він належить до* $\sigma$*-алгебри подій:*

$$\Omega \in \mathfrak{A}; \tag{203}$$

- *для довільної події її доповнення (до простору елементарних подій) також є подією:*

$$\forall\ A \in \mathfrak{A} \qquad \bar{A} \in \mathfrak{A}; \tag{204}$$

- *для довільної зліченної послідовності подій їхнє об'єднання є подією:*

$$(\forall\ n \in \mathbb{N} \quad A_n \in \mathfrak{A}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}; \tag{205}$$

$\mathbf{P}$ — *деяка функція з* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathbb{R}$, *яку називають ймовірністю*[1] *і яка має такі властивості:*

- *ймовірність будь-якої події визначена й лежить у межах від 0 до 1 включно:*

$$\forall\ A \in \mathfrak{A} \qquad 0 \le \mathbf{P}(A) \le 1; \tag{206}$$

- *ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з елементарних подій, дорівнює 1:*

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1; \tag{207}$$

---

[1] Символ **P** походить від латинського *probabilitas* — "ймовірність".

- *для довільної зліченної сукупності несумісних подій імовірність їхнього об'єднання дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N} \quad A_n \in \mathfrak{A} \\ \forall\ n, m \in \mathbb{N} \quad A_n \cap A_m = \varnothing \end{cases}$$
$$\Downarrow \tag{208}$$
$$\mathbf{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots\right) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) + \cdots$$

Твердження (203–208) називають *аксіомами теорії ймовірностей.* Останню властивість називають *σ-адитивністю (зліченною адитивністю) ймовірності,* а відповідну аксіому — *розширеною аксіомою додавання.*

**Теорема 130.** *За умови справдження аксіом (203–207) розширена аксіома додавання (208) еквівалентна системі двох тверджень:*

- *аксіомі неперервності:*

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N} \quad B_{n+1} \subset B_n \in \mathfrak{A} \\ \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n = \varnothing \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0; \tag{209}$$

- *аксіомі додавання для скінченної кількості несумісних подій:*

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \begin{cases} n \in \{1, 2,\ \dots\ , k\} \quad A_n \in \mathfrak{A} \\ n, m \in \{1, 2,\ \dots\ , k\} \quad A_n \cap A_m = \varnothing \end{cases}$$
$$\Downarrow \tag{210}$$
$$\mathbf{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k\right) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_k)$$

**Доведення.** Нехай справджується аксіома (208), а для послідовності множин $B_n$ справджується система тверджень, записана ліворуч у (209). Виберемо $A_n = B_n \backslash B_{n+1}$. За побудовою різні події $A_n$ попарно несумісні. Маємо:

$$\bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j = \bigcup_{j=n}^{+\infty} B_j \backslash B_{j+1} = \{x |\ \exists\ j \geq n \ \ x \in B_j \backslash B_{j+1}\},$$

бо $B_{j+1} \subset B_j \subset \cdots \subset B_n$. Водночас для довільного $b \in B_n$ $b \notin \bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} B_j$, тому $(\exists\ j \geq n \quad b \in B_j \backslash B_{j+1}) \Leftrightarrow b \in \bigcup\limits_{j=n}^{+\infty} A_j$. Маємо:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_j).$$

Зі збіжності ряду $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_j)$ випливає збіжність до 0 сум $\sum\limits_{j=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_j)$, якщо $n \to +\infty$. Отже, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0$.

Доведемо достатність. Нехай справджуються твердження (209–210), а всі події послідовності $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ попарно несумісні. Виберемо:

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

За побудовою $B_{n+1} \subset B_n$. Якщо відбулася подія $B_n$, то відбулася одна з подій $A_j$ для деякого $j \geq n$. Тоді через попарну несумісність подій $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ не відбулися події $A_{j+1}$, $A_{j+2}$, ... , а отже, і $B_{j+1}$, $B_{j+2}$, ... , звідси маємо: $\bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} B_j = \varnothing$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \cup \bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}(A_j) + \mathbf{P}(B_n) = \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_j), \qquad \text{бо} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0.\end{aligned}$$

**Зауваження 66.** *Безпосередньо з означення 134 випливають такі властивості ймовірності:*

$$\begin{cases} A, B \in \mathfrak{A} \\ A \subset B \end{cases} \Rightarrow \mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}(A), \tag{211}$$

*бо* $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \backslash A)$;

$$\forall\ A \in \mathfrak{A} \quad \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A),$$

*бо* $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1;$

$$\forall\ A, B \in \mathfrak{A} \quad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B),$$

*бо* $A \cup B = A \cup (B \backslash (A \cap B))$.

**Зауваження 67.** *Система аксіом (203–208) неповна: навіть для однієї і тієї самої множини подій* $\mathfrak{A}$ *на просторі елементарних подій* $\Omega$ *ймовірність* $\mathbf{P}$ *можна задавати різним чином. Це свідчить не про невдалий вибір аксіом (203–208), а лише про те, що явища можна описувати одним і тим самим простором елементарних подій, але з різними ймовірностями цих подій. Наприклад, якщо у монети суттєво зміщений центр мас від її геометричного центру, то ймівірність випадання певної грані монети при її випадковому підкиданні природно вважати відмінною від 1/2.*

Історично першими розглядалися скінченні простори елементарних подій з класичною ймовірністю при аналізі азартних ігор (у карти, з гральними кубиками та ін.). Аксіоматичний підхід до теорії ймовірностей з'явився лише у 30-их рр. XX ст. завдяки працям Колмогорова[1] й Хінчина[2].

## 15.2. Класична ймовірність

**Означення 135.** *Ймовірність простору* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ *називають класичною, якщо:*

[1] Колмогоров Андрій Миколайович (1903–1991) — російський математик. Працював у галузі теорії функцій дійсної змінної і теорії ймовірностей. Отримав результати щодо подання функцій багатьох змінних функціями меншої кількості змінних. Зробив істотний внесок у так звану конструктивну логіку, займався топологією, теорією наближення функцій і функціональним аналізом. Розвинув теорію стаціонарних процесів. Відкрив закони статистичної теорії турбулентності. Вивчав статистичні методи контролю масової продукції і теорії передавання інформації каналами зв'язку.

[2] Хінчин Олександр Якович (1894–1959) — російський математик. Запровадив поняття асимптотичної похідної. Вивчав будову метричних функцій. Методи метричної теорії функцій переніс у теорію чисел і теорію ймовірностей. Отримав важливі результати щодо граничних теорем теорії ймовірностей, відкрив закон повторного логарифма, дав означення випадкового стаціонарного процесу і створив основи теорії таких процесів. Використав методи теорії ймовірностей у статистичній фізиці. Створив математичні методи теорії масового обслуговування.

- *простір елементарних подій скінченний (це позначають так: $|\Omega| < +\infty$);*
- *подіями є всі підмножини простору елементарних подій (це позначають так: $\mathfrak{A} = 2^{\Omega}$);*
- *для довільної події $A$ її ймовірність пропорційна до кількості елементарних подій, з яких вона складається:* $\mathbf{P}(A) = |A|/|\Omega|$.

Прикладом імовірнісного простору подій для опису результату одного кидання грального кубика з класичною ймовірністю[1] є така трійка:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — множина результатів (кількості очок);

$\mathfrak{A} = 2^{\Omega}$ — всі 64 підмножини 6-елементної множини $\Omega$;

$\mathbf{P}$ — класичний розподіл імовірностей, тобто $\mathbf{P}(A) = |A|/6$, коли кожна грань випадає з ймовірністю $1/6$.

**Задача 30 (парадокс де Мере).** *Кавалер де Мере, товариш Блеза Паскаля і пристрасний гравець, помітив, що при багаторазовому киданні трьох гральних кубиків сума очок, що дорівнює 11, випадає частіше, ніж сума очок, що дорівнює 12. Це викликало його здивування, бо і число 11, і число 12 можна подати сумою трьох натуральних чисел у межах від 1 до 6 шістьма різними способами:*

$$11=6+4+1=6+3+2=5+5+1=5+4+2=5+3+3=4+4+3;$$

$$12=6+5+1=6+4+2=6+3+3=5+5+2=5+4+3=4+4+4.$$

*Як пояснити результати випробувань з допомогою класичної ймовірності?*

**Розв'язання.**[2] Подією в даних спостереженнях є не тільки очки, що випали. Потрібно враховувати й те, на яких саме кубиках вони випадають:

[1] Даний опис не є адекватним, якщо використовується кубик зі зміщеним центром мас.

[2] На помилку в міркуваннях де Мере, поданих в умові задачі, вказав Блез Паскаль.

- 11=6+4+1=6+3+2=5+4+2, 12=6+5+1=6+4+2=5+4+3, і кожне таке подання можна отримати 6-ма способами (кількість перестановок 3-елементної множини);

- 11=5+5+1=5+3+3=4+4+3, 12=6+3+3=5+5+2, і кожне таке подання можна отримати 3-ма способами;

- подання 12=4+4+4 можна отримати єдиним способом.

Всього є $6^3 = 216$ різних результатів кидання кубиків, з них появі суми 11 сприяє $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27$ результатів, а появі суми 12 — $3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 = 25$ результатів.

Парадокс де Мере ілюструє:

- розв'язання проблеми адекватності опису результатів випробувань на рівні побудови ймовірнісного простору;

- тісний зв'язок задач на використання класичної ймовірності із задачами комбінаторики.

## 15.3. Геометрична ймовірність

**Означення 136.** *Ймовірність простору $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ називають геометричною в таких випадках:*

1. *$\Omega$ — відрізок числової прямої, обмежений дійсними числами $a$ і $b$, $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра, що містить всі проміжки числової прямої, які повністю належать до $\Omega$; $\mathbf{P}$ — такий розподіл імовірностей, що для проміжку $[c; d) \subset \Omega$ ймовірність пропорційна до його довжини: $\mathbf{P}([c; d)) = |d - c|/|b - a|$.*

2. *$\Omega$ — плоска фігура зі скінченною площею, $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра, якій належать всі багатокутники, що повністю містяться в $\Omega$, $\mathbf{P}$ — імовірність, пропорційна до площі події $A \in \mathbf{A}$: $\mathbf{P}(A) = \mathrm{mes}(A)/\mathrm{mes}(\Omega)$.*

3. *$\Omega$ — просторове тіло зі скінченним об'ємом, $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра, якій належать всі багатогранники, що повністю містяться в $\Omega$, $\mathbf{P}$ — ймовірність, пропорційна до об'єму події $A \in \mathbf{A}$: $\mathbf{P}(A) = \mathrm{mes}(A)/\mathrm{mes}(\Omega)$.*

**Зауваження 68.** *Існування геометричних імовірностей та їхню $\sigma$-адитивність доводять у курсі теорії функцій дійсної змінної побудовою так званої міри Лебега*[1]*, що є узагальненням довжини, площі й об'єму на відповідні $\sigma$-алгебри.*

**Задача 31.** *Біля університету знаходиться автобусна зупинка. Якщо студент поїде в одному напрямку, то зможе зустрітися зі знайомою дівчиною, якщо у протилежному — то зі шкільним товаришем. Щоб не переобтяжувати себе проблемою вибору, він вирішив навмання приходити на зупинку й сідати у перший автобус, який під'їде. Інтервал руху між автобусами в кожному напрямку складає 5 хв, і на зупинці ніколи не буває більше, ніж один автобус. Через півроку виявилося, що з дівчиною студент зустрічався у 4 рази частіше, ніж з товаришем. Як це можна пояснити?*

**Розв'язання** полягає у побудові ймовірнісного простору з відповідним розподілом імовірності. Результат випробувань не змінюється від зсуву в часі на 5 хвилин, тому за простір елементарних подій виберемо проміжок (0;5], де нулю відповідає відправлення автобуса в напрямку до знайомої дівчини, п'ятірці — наступне відправлення у тому самому напрямку. Позначимо через $a$ число інтервалу (0;5], якому відповідає момент відправлення автобуса в напрямку до шкільного товариша. Якщо студент приходить на зупинку в момент часу $t \in (0;5]$, то він їде до товариша за умови, що $0 < t \le a$, їде до дівчини, якщо $a < t \le 5$. Геометрична ймовірність першої події (подорожі до товариша) складає $a/5$, другої (подорожі до дівчини) — $(5-a)/5$. Якщо дотримуватися гіпотези про адекватність опису випробувань за допомогою запровадженої геометричної ймовірності, то отримаємо:

$$\frac{a}{5} : \frac{5-a}{5} = \frac{a}{5-a} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = 1.$$

**Відповідь.** Автобус, що підвозить студента до товариша, відправляється через 1 хв після відправлення автобуса, який везе студента до знайомої дівчини.

[1] Анрі Луї Лебег (1875–1941) — французький математик. Створив теорію міри, запровадив поняття вимірної функції і нове поняття інтеграла, що значно розширило множину інтегровних функцій.

## 15.4. Незалежні події. Умовна ймовірність

**Означення 137.** *Події $A$, $B$ імовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ називають незалежними, якщо ймовірність одночасного здійснення подій $A$ і $B$ дорівнює добутку ймовірностей цих подій:*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Наприклад, події, що полягають у випаданні певної кількості очок на кожному з двох (трьох, чотирьох і т. ін.) гральних кубиків під час гри, природно вважати незалежними. Такі події справді *незалежні для класичної ймовірності.*

**Зауваження 69.** *Якщо події $A$ і $B$ ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ незалежні, то незалежними є події $A$ і $\bar{B}$.*

**Доведення.** $\mathbf{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbf{P}(A \backslash B) = \mathbf{P}(A \backslash (A \cap B)) =$
$= \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \cdot (1 - \mathbf{P}(B)) =$
$= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B})$.

**Зауваження 70.** *Подія, ймовірність якої дорівнює 0 або 1, незалежна від будь-якої іншої події.*

**Доведення.** Ймовірність події, що є підмножиною події ймовірності 0, згідно з (211) дорівнює нулю, тому подія з імовірністю 0 незалежна відносно будь-якої події. Незалежність події ймовірності 1 — наслідок попереднього зауваження 69.

**Означення 138.** *Для таких подій $A$ і $B$ ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, що $\mathbf{P}(B) > 0$, умовною ймовірністю події $A$ за умови виконання події $B$, що позначають $\mathbf{P}(A|B)$, називають таке відношення:*

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B) / \mathbf{P}(B).$$

**Зауваження 71.** *Для незалежних подій $A$ і $B$, де $\mathbf{P}(B) > 0$, умовна ймовірність події $A$ за умови виконання події $B$ дорівнює ймовірності події $A$:*

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A). \tag{212}$$

**Задача 32.** *Нехай в урні є 2 білі кулі й 2 чорні. Два гравці виймають по одній кулі з урни. Розглянемо події: $A$ — поява білої кулі у першого гравця, $B$ — поява білої кулі у другого гравця. Чи є події незалежними?*

**Розв'язання.** Дотримуючись гіпотези про класичний розподіл імовірностей, маємо:

- ймовірність події $A$ дорівнює $1/2$: потрібно витягнути одну з двох білих куль, коли в урні є 4 кулі;
- ймовірність події $A$ за умови виконання події $B$ дорівнює $1/3$: потрібно витягнути одну кулю з трьох, що залишилися в урні.

$1/2 \neq 1/3$, тобто рівність (212) не справджується.
**Відповідь.** За класичної ймовірності вказані події залежні одна від одної.

**Означення 139.** *Події $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ називають незалежними в сукупності, якщо для довільних $k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$ і $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$:*

$$\mathbf{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \mathbf{P}(A_{j_1}) \cdot \mathbf{P}(A_{j_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{j_k}).$$

**Теорема 131.** *Нехай $n$ подій $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ імовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ незалежні в сукупності. Тоді ймовірність здійснення принаймні однієї з перелічених подій дорівнює:*

$$\mathbf{P}(A) = 1 - (1 - \mathbf{P}(A_1)) \cdot (1 - \mathbf{P}(A_2)) \cdots (1 - \mathbf{P}(A_n)). \tag{213}$$

**Доведення.** Позначимо через $A$ подію, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з перелічених подій. Тоді маємо:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}\right) =$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left(\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2\right) \cap \cdots \cap \bar{A}_n\right)\right) =$$

$$= 1 - (1 - \mathbf{P}(A_1)) \cdot (1 - \mathbf{P}(A_2)) \cdots (1 - \mathbf{P}(A_n)),$$

де перша рівність випливає із зауваження 66, друга — з означення події $A$, третя — з наслідку правил Морґана для операцій з множинами, четверта — з асоціативності об'єднання множин, що є наслідком асоціативності диз'юнкції висловлювань, а п'ята — з означення незалежних у сукупності подій.

**Задача 33.** *Незалежно один від одного $n$ стрільців стріляють у ту саму ціль. Імовірність влучання для кожного з них становить $q \in (0; 1)$. Скільки потрібно стрільців, щоб імовірність влучення у ціль була не меншою, ніж $a \in (0; 1)$?*

**Розв'язання.** Ймовірність влучення в ціль згідно з доведеною формулою (213) дорівнює: $1-(1-q)^n$. Отже, задачу зведено до розв'язання такої нерівності: $a < 1-(1-q)^n \Leftrightarrow (1-q)^n < 1-a$.
**Відповідь.** $n > \log_{1-q}(1-a)$.

**Означення 140.** *Випадкові події $H_1$, $H_2$, ... , $H_n$ утворюють повну групу подій, якщо:*

- *ці події попарно несумісні, тобто $H_j \cap H_k = \varnothing$, якщо $j \neq k$;*
- *$H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$.*

**Теорема 132 (формула повної ймовірності).** *Нехай випадкові події $H_1$, $H_2$, ... , $H_n$ утворюють повну групу подій з додатними ймовірностями: $\mathbf{P}(H_j) > 0$ для всіх $j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. Тоді для довільної події $A$ справджується така рівність:*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j).$$

**Доведення.** $(A \cap H_j) \cap (A \cap H_k) \subset H_j \cap H_k = \varnothing$ для різних $j$, $k$. Тому права частина останньої рівності дорівнює:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A \cap H_j) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A \cap H_j\right) = \mathbf{P}(A \cap \Omega) = \mathbf{P}(A).$$

**Означення 141 (формула Байєса).** *Нехай випадкові події $H_1$, $H_2$, ... , $H_n$ утворюють повну групу подій з додатними ймовірностями — $\mathbf{P}(H_j) > 0$ для всіх $j = 1,\ 2,\ \dots, n$. Тоді для довільної випадкової події $A$ з додатною ймовірністю $\mathbf{P}(A) > 0$ і довільного $j$ у межах від 1 до $n$ включно справджується така рівність:*

$$\mathbf{P}(H_j|A) = \frac{\mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(H_k) \cdot \mathbf{P}(A|H_k)}. \tag{214}$$

**Доведення.** Згідно з означенням умовної ймовірності, чисельник правої частини формули Баєса (214) дорівнює $\mathbf{P}(H_j \cap A)$, знаменник (згідно з формулою повної ймовірності) дорівнює $\mathbf{P}(A)$, а їхнє відношення (згідно з означенням умовної ймовірності) дорівнює $\mathbf{P}(H_j|A)$.

**Зауваження 72.** *Поняття повної групи подій, формулу повної ймовірності й формули Байєса можна узагальнити на випадок зліченної послідовності подій.*

*Випадкові події* $\{H_j\}_{j=1}^{+\infty}$ *утворюють повну групу подій, якщо*

$$H_j \cap H_k = \emptyset \quad \text{для} \quad j \neq k, \qquad \bigcup_{j=1}^{+\infty} H_j = \Omega.$$

*Якщо ймовірність кожної такої події* $H_j$ *додатна, то для довільної події* $A$ *маємо:*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j).$$

*Якщо ж* $\mathbf{P}(A) > 0$, *то маємо:*

$$\mathbf{P}(H_j|A) = \frac{\mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j)}{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(H_k) \cdot \mathbf{P}(A|H_k)}.$$

## 15.5. Біноміальний розподіл

**Теорема 133.** *Нехай* $n$ *подій* $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ *імовірнісного простору* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ *незалежні в сукупності й мають однакову ймовірність* $p$. *Тоді ймовірність здійснення рівно* $k$ *подій з даних* $n$ *дорівнює:*

$$\mathbf{P}_{k,n} = C_n^k p^k (1-p)^k. \tag{215}$$

**Доведення.** Ймовірність описаної події дорівнює сумі ймовірностей несумісних подій:

$$\mathbf{P}\left(B_1 \cap B_2 \cup \cdots \cap B_n\right) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(B_2) \cdots \mathbf{P}(B_n), \tag{216}$$

де (для $j$ в межах від 1 до $n$ включно) подія $B_j$ є подією $A_j$ (таких є $k$ подій) або її доповненням (таких є $(n-k)$ подій). Кожен такий доданок (216) дорівнює $p^k(1-p)^{n-k}$, а їхня кількість дорівнює $C_n^k$.

Розв'язування задач за допомогою доведеної теореми називають *схемою Бернуллі* або схемою з повертанням кулі, бо будь-яку задачу, яку розв'язують за цією схемою, можна розглядати як задачу про багаторазове виймання кулі з урни, що містить білі і чорні кулі, з подальшим поверненням кулі в урну. Формулу (215) називають *формулою Бернуллі*. Права частина формули (215) є членом розкладення бінома $(p+(1-p))^n=1$. Розподіл імовірностей за цією формулою називають *біноміальним розподілом.*

## 15.6. Схема Бернуллі до першого успіху

**Означення 142.** *Простір елементарних подій називають дискретним, якщо він зліченний:*

$$\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{J}} \{\omega_j\},$$

*де* $\mathbb{J}$ *— ряд натуральних чисел або його підмножина* $\{1, 2, \ldots, |\Omega|\}$. *У даному разі:*

- $\sigma$*-алгеброю подій вважають сукупність всіх підмножин* $\Omega$*;*
- *кожній елементарній події* $\{\omega_j\}$ *ставиться у відповідність* $p_j = \mathbf{P}(\{\omega_j\})$ *— ймовірність цієї події. Таким чином, для довільної події* $A$ *маємо:*

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{\omega_j\in A}\{\omega_j\}\right) = \sum_{\omega_j\in A} p_j, \tag{217}$$

$$\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{\omega_j\in\Omega} p_j = 1.$$

**Зауваження 73.** *Несуперечливість імовірнісного опису дискретного простору станів означає незалежність від порядку додавання суми членів нескінченного ряду невід'ємних чисел (доводиться в курсі математичного аналізу вищих навчальних закладів).*

З означення незалежності в сукупності подій випливає подане нижче твердження.

**Теорема 134.** *Нехай події* $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... *ймовірнісного простору* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ *незалежні в сукупності й мають однакову ймовірність* $p$*. Тоді маємо:*

$$\mathbf{P}(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_{n-1}\cap A_n) = p\cdot(1-p)^{n-1}. \tag{218}$$

Розв'язування задач за допомогою поданої теореми називають *схемою Бернуллі до першого успіху* (див. задачу 34).

**Задача 34.** *Учень відповідає навмання на запитання вчителя до першої правильної відповіді. Ймовірність правильної відповіді дорівнює* $p = 3/5$, *причому правильність відповіді на кожне запитання не залежить від правильності відповіді на попередні запитання. Яка ймовірність того, що кількість запитань буде скінченною?*

**Розв'язання.** Очевидна придатність схеми Бернуллі до першого успіху, якщо припустити, що $A_j$ — подія, яка полягає у тому, що правильно дано відповідь на $j$-те запитання. Кількість запитань скінченна, якщо вона дорівнює або 1, або 2, або 3 і т. ін. Всі ці події несумісні, тому шукана ймовірність дорівнює:

$$p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \cdots = \frac{p}{1-(1-p)} = 1,$$

де перша рівність випливає з формули для знаходження суми членів спадної геометричної прогресії.

**Відповідь.** З ймовірністю 1 учень дасть правильну відповідь, відповівши на скінченну кількість запитань.

## 15.7. Дискретна випадкова величина

**Означення 143.** *Нехай* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ — *ймовірнісний простір. Дискретною випадковою величиною називають функцію* $\xi$ *на* $\Omega$, *що набуває скінченного або зліченного числа значень* $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots$, *причому для кожного* $x_j$ *маємо:* $\{\omega \in \Omega |\ \xi(\omega) = x_j\} \in \mathfrak{A}$, *і тому визначена ймовірність:*

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega |\ \xi(\omega) = x_j\} = p_j. \tag{219}$$

*Набір величин* (219) *називають розподілом (імовірностей) випадкової величини* $\xi$. *Функцію розподілу* $F$ *такої випадкової величини визначають рівностями:*

$$F(x) = \mathbf{P}\{\omega |\ \xi(\omega) < x\} = \sum_{j,\ x_j < x} p_j.$$

Зрозуміло, що $p_j \geq 0$, $\sum_j p_j = 1$. Часто розподіл випадкової величини подають у вигляді таблиці, в якій переховують значення випадкової величини разом з відповідними ймовірностями:

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_j$ | $\cdots$ |

.

**Означення 144.** *Нехай $\xi$ — дискретна випадкова величина, що набуває значень $x_j$ відповідно з імовірностями $p_j$. Припустимо, що ряд $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j p_j$ абсолютно збіжний. Тоді математичним сподіванням випадкової величини $\xi$ називають суму ряду:*

$$\mathbf{M}\ \xi(\omega) = \sum_j x_j p_j.$$

*В іншому разі кажуть, що випадкова величина $\xi$ не має математичного сподівання.*

*Дисперсію випадкової величини $\xi$ з розподілом імовірностей (219) визначають такими рівностями:*

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \sum_j (x_j - \mathbf{M}\xi)^2 p_j,$$

*якщо відповідний ряд збігається.*

**Означення 145.** *Кажуть, що випадкова величина $\xi$, що набуває невід'ємних цілих значень, має розподіл Пуассона*[1] *з параметром $\lambda$, якщо $\mathbf{P}\{\xi = j\} = \lambda^j e^{-\lambda}/j!$ .*

## 15.8. Сумісний розподіл дискретних величин

**Означення 146.** *Нехай $\xi(\omega)$ — дискретна випадкова величина, що набуває значень $x_1$, $x_2$, ... , $x_j$, ... , $\eta(\omega)$ — дискретна випадкова*

[1] Сімеон Дені Пуассон (1781–1840) — французький математик, який ґрунтовно займався питаннями математичної фізики (небесної механіки, електро- і магнетостатики, гідромеханіки). Суттєво поліпшив способи застосування теорії ймовірностей. Уперше використав вказаний термін *закон великих чисел*. У загальній теорії рівнянь запропонував оригінальний метод виключення змінних. Заклав основи сучасної теорії знаходження сум розбіжних рядів. Незалежно від Бесселя відкрив спеціальні функції, які тепер називають бесселевими, і подав їх рядами. В дифференціальній геометрії має працю щодо кривини поверхні.

*величина, що набуває значень $y_1$, $y_2$, ... , $y_k$, ... . Набір чисел*

$$p_{jk} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega |\ \xi(\omega) = x_j \ \wedge \ \eta(\omega) = y_k\} \tag{220}$$

*називають сумісним розподілом випадкових величин $\xi$ і $\eta$ або розподілом випадкового вектора $\vec{v}(\xi;\eta)$.*

Для довільного сумісного розподілу (220) справджуються такі твердження:

$$p_{jk} \geq 0, \quad \sum_j \sum_k p_{jk} = 1, \quad \sum_k p_{jk} = p_j, \quad \sum_j p_{jk} = q_k, \tag{221}$$

де $\{p_j\}$ — розподіл $\xi(\omega)$, $\{q_k\}$ — розподіл $\eta(\omega)$. З останніх двох рівностей (221) випливає, що *математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин.*

**Означення 147.** *Випадкові величини $\xi$ і $\eta$ з сумісним розподілом (220–221) називають незалежними, якщо для довільних $j$, $k$ справджується така рівність: $p_{jk} = p_j \cdot q_k$.*

**Означення 148.** *Коефіцієнтом коваріації випадкових величин $\xi$, $\eta$ називають таке математичне сподівання:*

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta). \tag{222}$$

*Коефіцієнтом кореляції випадкових величин $\xi$, $\eta$ називають таке відношення:*

$$r(\xi,\eta) = \frac{\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}}. \tag{223}$$

**Зауваження 74.** *Якщо дисперсія випадкової величини дорівнює 0, то з ймовірністю 1 ця випадкова величина стала*[1].

**Теорема 135.** *Нехай $\xi$ та $\eta$ — дискретні випадкові величини з додатними дисперсіями. Тоді:*

*а)* $|r(\xi,\eta)| \leq 1$;

*б) якщо $|r(\xi,\eta)| = 1$, то існують такі сталі $a$ і $b$, при яких з імовірністю 1: $\eta = a\xi + b$;*

[1] Тобто для всіх $\omega \in \Omega'$, де $\Omega' \in \mathfrak{A}$, $\mathbf{P}(\Omega') = 1$.

*в) якщо $\xi$ й $\eta$ незалежні, то $r(\xi, \eta) = 0$.*

**Доведення.** Для довільного дійсного $a$ маємо:

$$0 \le a^2(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 - 2a(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta) + (\eta - \mathbf{M}\eta)^2,$$

де ліворуч — $(a(\xi-\mathbf{M}\xi)-(\eta-\mathbf{M}\eta))^2$. Взявши математичне сподівання від крайніх частин нерівності, маємо:

$$0 \le a^2\mathbf{D}\xi + 2a\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta) + \mathbf{D}\eta.$$

Отже, маємо:

$$(\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta))^2 \le \mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta,$$

що еквівалентне твердженню а). Нерівність перетворюється на рівність тоді й лише тоді, коли існує таке дійсне $a$, при якому з ймовірністю 1:

$$a(\xi - \mathbf{M}\xi) - (\eta - \mathbf{M}\eta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta = a\xi + b \\ b = \mathbf{M}\eta - \mathbf{M}\xi \end{cases}.$$

Для незалежних $\xi$ й $\eta$ із сумісним розподілом (220–221) маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi\eta &= \sum_j \sum_k x_j y_k p_{jk} = \sum_j \sum_k x_j y_k p_j q_k = \\ &= \left(\sum_j x_j p_j\right) \left(\sum_k y_k q_k\right) = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta \end{aligned} \tag{224}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta) = \mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta = 0.$$

**Зауваження 75.** *Якщо множина значень однієї з випадкових величин нескінченна, то для обґрунтування перетворень (224) потрібно довести відповідну теорему про абсолютно збіжні ряди.*

Без будь-яких труднощів поняття сумісного розподілу дискретних випадкових величин можна поширити на довільну кількість цих величин. Наприклад, нехай проводяться незалежні випробування, в кожному з яких може бути $r$ результатів: $E_1$ — з імовірністю $p_1$, $E_2$ — з імовірністю $p_2$, ... $E_r$ — з імовірністю $p_r$. Проведено $n$ випробувань. Нехай $v_j$ — число появ $E_j$. Тоді вектор $\vec{v}(v_1, ...., v_r)$ має так званий *поліноміальний розподіл:*

$$\mathbf{P}\{v_1 = m_1, \ \dots\ , \ v_r = m_r\} = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots m_r)!}{m_1! \cdot m_2 \cdots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

## 15.9. Випадкова величина

**Означення 149.** *Нехай* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *— ймовірний простір. Випадковою величиною називають таку функцію* $\xi : \Omega \to \Re$*, при якій для довільного дійсного x маємо:* $\{\omega \in \Omega | \ \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{A}$.

*Функцією розподілу випадкової величини* $\xi$ *називають таку функцію:*

$$F(x) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega | \ \xi(\omega) < x\}. \tag{225}$$

Безпосередньо з означення (225) випливають такі нерівності:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \tag{226}$$

**Теорема 136.** *Функція розподілу* $F$ *випадкової величини* $\xi$ *неперервна зліва, неспадна на* $\mathbb{R}$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

**Доведення**[1]**.** Нехай $a < b$ — довільні дійсні числа. Враховуючи $\sigma$-адитивність імовірності, маємо[2]:

$$F(b) = \mathbf{P}\{\xi < b\} = \mathbf{P}\{\xi < a \ \vee \ a \leq \xi < b\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi < a\} + \mathbf{P}\{a \leq \xi < b\} = F(a) + \mathbf{P}\{a \leq \xi < b\} \geq F(a).$$

Таким чином, доведено неспадання $F$ і рівність:

$$\mathbf{P}\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a).$$

---

[1] Для кожної функції $F(x)$, що має ці властивості, можна побудувати ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ і випадкову величину $\xi(\omega)$ на ньому, яка має функцією розподілу $F(x)$. Достатньо припустити, що $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbf{P}\left((-\infty; a)\right) = F(a)$, $\xi(\omega){=}\omega$. Доведення $\sigma$-адитивності ймовірності потребує використання теорії міри.

[2] Вжито загальноприйняті скорочення: випущено послідовність символів "$\omega \in \Omega|$" в означенні множини, для якої визначається ймовірність, і не вказано аргумент випадкової величини.

Доведемо неперервність зліва. Нехай послідовність $\{x_n\}$ збігається до $x$ зліва. Тоді маємо:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x_n \leq \xi < x\} = \emptyset,$$

і з аксіоми неперервності випливає, що

$$F(x) - F(x-0) = \lim_{n \to +\infty} (F(x) - F(x_n)) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\{x_n \leq \xi < x\} = 0.$$

Для кожної елементарної події $\omega$ знайдеться таке ціле $j$, при якому $j - 1 \leq \xi(\omega) < j$. Тому маємо:

$$1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}\{j - 1 \leq \xi < j\} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=-n+1}^{n} (F(j) - F(j-1)) =$$
$$= \lim_{n \to +\infty} (F(n) - F(-n)) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Для завершення доведення теореми потрібно врахувати область значень $F$ (див. нерівності (226)).

**Означення 150.** *Якщо функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ можна подати у такому вигляді:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\ du, \tag{227}$$

*то кажуть, що випадкова величина $\xi$ має щільність розподілу $p$.*

**Зауваження 76.** *Поданий в означенні (227) інтеграл (як і подані далі інтеграли) — інтеграл Лебега, означений для скінченного проміжку інтегрування на далеко ширшій множині функцій, ніж інтеграл Рімана. Для щільності розподілу $p$, що не є неперервною лише у скінченній кількості точок (надалі обмежимося розглядом лише таких щільностей), величини цих інтегралів (Рімана і Лебега) збігаються. Щільність розподілу $p$ — невід'ємна функція, причому:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u)\ du = 1.$$

**Означення 151.** *Випадкова величина має рівномірний розподіл на відрізку* $[a;b]$, *якщо щільність її розподілу дорівнює:*

$$p(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a;b]; \\ 0, & x \notin [a;b]. \end{cases}$$

*Випадкова величина має показниковий розподіл з параметром* $\lambda$, *якщо щільність її розподілу дорівнює:*

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

*Випадкова величина має нормальний* $N(a, \sigma^2)$ *розподіл (див. рис. 97), якщо щільність її розподілу для довільного дійсного* $x$ *дорівнює*[1]*:*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{228}$$

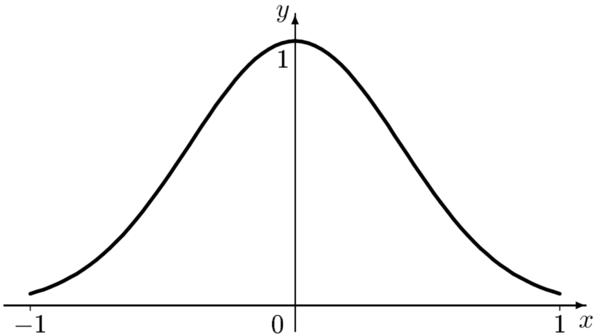



*Рис. 97.* Графік щільності нормального розподілу $N(0, 4/25)$.

**Теорема 137.** *Нехай* $F(x)$ — *функція розподілу випадкової величини* $\xi$ *з нормальним* $N(a, \sigma^2)$ *розподілом. Тоді* $(\xi - a)/\sigma$ *має нормальний* $N(0, 1)$ *розподіл з функцією розподілу:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt,$$

[1] Доведення рівності $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\ dx = 1$ потребує використання теорем аналізу, яких у цій книзі не подано.

*причому* $F(x) = \Phi((x-a)/\sigma)$.

**Доведення** зводиться до заміни змінної при інтегруванні.

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi(\omega) < x\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi(\omega)-a}{\sigma} < \frac{x-a}{\sigma}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) d\left(\frac{t-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt.$$

**Зауваження 77.** *Графік щільності розподілу (228)* $y = p(x)$ *симетричний відносто прямої* $\{x = a\}$*:* $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad p(a+x) = p(a-x)$.

*Відповідний графік функції розподілу* $y = F(x)$ *симетричний відносно точки* $(a; 1/2)$*:* $\qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \quad F(a+x) + F(a-x) = 1 = 2F(a)$.

## 15.10. Характеристики розподілу

**Означення 152.** *Якщо існує щільність розподілу* $p$ *випадкової величини* $\xi$*, то всі величини* $x$*, в яких* $p$ *досягає свого локального максимуму, називають модами розподілу* $\xi$*. Якщо мода єдина, то розподіл* $\xi$ *називають унімодальним, інакше — мультимодальним.*

*Медіаною випадкової величини* $\xi$ *з функцією розподілу* $F$ *називають таке дійсне* $x_m$*, при якому:*

$$F(x_m) \le \frac{1}{2}, \qquad F(x_m + 0) \ge \frac{1}{2}.$$

Якщо існує щільність розподілу $p$ випадкової величини $\xi$, то медіана $x_m$ визначається такими рівностями:

$$\int\limits_{-\infty}^{x_m} p(x)\ dx = \int\limits_{x_m}^{-\infty} p(x)\ dx = \frac{1}{2}.$$

Нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$ — приклад унімодального розподілу, мода якого $a$ також є математичним сподіванням і медіаною. Мода $x = 0$ унімодального показникового розподілу не є медіаною.

**Означення 153.** *Випадкова величина $\xi$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ зі щільністю функції розподілу $p$ має математичне сподівання $\mathbf{M}\xi$ і дисперсію $\mathbf{D}\xi$, якщо відповідно існують інтеграли:*

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ p(x)\ dx; \qquad \mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2\ p(x)\ dx.$$

*У разі, коли випадкова величина не має щільності розподілу, математичне сподівання і дисперсію визначають інтегралами Стільтьєса*[1]*:*

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ dF(x); \qquad \mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 dF(x). \tag{229}$$

*У рівностях (229) інтеграл по числовій прямій — границя інтегралів по відрізках $[a;b]$ за умови $a \to -\infty$, $b \to -\infty$. При цьому для довільної неперервної на $[a;b]$ функції $g$ маємо:*

$$\int_a^b g(x)\ dF(x) = \lim_{\lambda(\{x_j\}) \to 0} \sum_{j=1}^{n} g(\tau_j)(F(x_j) - F(x_{j-1})).$$

*В останній рівності $\{\tau_j\}$ — довільна послідовність внутрішніх точок розбиття $\{x_j\}$ відрізка $[a;b]$, $\lambda(\{x_j\})$ — його діаметр.*

Для нормального $N(a, \sigma^2)$ розподілу маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi \quad &= \quad \frac{a}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)\ dt\ + \\ &+ \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot (t-a)\ dt\ =\ a, \end{aligned}$$

[1] Томас Іоаннес Стільтьєс (1856–1894) — нідерландський математик. Вивчав функціональні неперервні дроби, проблему моментів, теорію ортогональних многочленів, наближеного інтегрування. Узагальнив поняття інтеграла.

де перший інтеграл дорівнює $a$, згідно з означенням щільності розподілу, а другий — 0 (див. зауваження 77). Дисперсія нормального $N(a,\sigma^2)$ розподілу дорівнює[1] $\sigma^2$.

*Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань,* бо інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій.

**Означення 154.** *Якщо існують відповідні інтеграли, означимо $k$-ий початковий момент і $k$-ий центральний момент випадкової величини $\xi$ з функцією розподілу $F$ відповідно такими рівностями:*

$$\mathbf{M}\xi^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \, dF(x); \qquad \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^k \, dF(x).$$

## 15.11. Частота випадкової події

**Означення 155.** *Нехай $\Omega$ — простір елементарних подій експерименту (простір наслідків експерименту), $\mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра подій, пов'язаних з експериментом. Розглянемо довільну випадкову подію $A \in \mathfrak{A}$. Припустимо, що експеримент проведено $n$ разів. Позначимо через $k_n(A)$ число експериментів, у яких відбулась подія $A$. Частотою (для даної серії експериментів) події $A$ називають відношення $\nu_n(A) = k_n(A)/n$.*

Важливим прикладом стохастичного експерименту є експеримент вимірювання величини, що набуває довільних дійсних значень. Простір $\Omega$ в даному разі — вся числова вісь. Припустимо, що приведено $n$ експериментів, а значення вимірюваної величини в $j$-му експерименті є $x_j$. Величини $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ називають *спостереженнями (вибіркою).* Нехай $x$ — довільне дійсне число. Частоту події, яка полягає в тому, що результат спостереження менший, ніж $x$, називають емпіричною функцією розподілу вибірки:

$$F_n^*(x) = \frac{\{\text{число тих } x_j, \text{ для яких } x_j < x\}}{n}.$$

[1] Доводиться у курсі математики вищих навчальних закладів з використанням тверджень інтегрального числення, не розглянутих у цій книзі.

Графік емпіричної функції розподілу складається з горизонтальних проміжків, абсциси кінців яких — елементи вибірки (див. рис. 98).

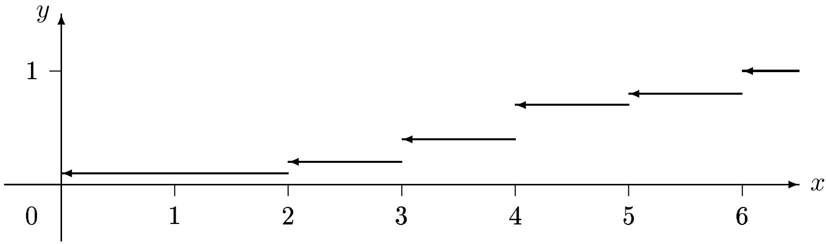



*Рис. 98.* Графік емпіричної функції розподілу для вибірки 0, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6.

*Емпіричне математичне сподівання,* побудоване за емпіричною функцією розподілу згідно з означенням (229), — середнє арифметичне спостережень:

$$\mathbf{M}_n^*\xi = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

**Зауваження 78.** *Нормальний розподіл — окремий випадок так званих безмежно подільних розподілів, які є границею розподілів суми незалежних випадкових величин при прямуванні кількості доданків до нескінченності. Тому графіки функцій розподілу величин, на які впливають багато різних факторів, кожен з яких не є вирішальним, схожі на графік функції нормального розподілу, а графічне подання вибірки відтворює поведінку щільності нормального розподілу. Так звана центральна гранична теорема встановлює умови, за яких розподіл суми незалежних випадкових величин збігається до нормального розподілу. Так званий закон великих чисел встановлює достатні умови того, що емпірична функція розподілу, побудована за спостереженнями незалежних однаково розподілених випадкових величин, збігається до їхнього розподілу. Посилений закон великих чисел встановлює достатні умови того, що емпіричне математичне сподівання, побудоване за такою емпіричною функцією розподілу, збігається до математичного сподівання цих величин.*

# Розділ 16. Вступ до статистики

## 16.1. Статистичні методи

*Статистика*[1] — наука, що збирає, опрацьовує і вивчає дані, пов'язані з масовими явищами, процесами та подіями. *Математична* статистика — розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, опрацювання й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. Статистика виникла з практичних потреб людей, їхньої господарської діяльності, необхідності обліку: земельних угідь, майна, чисельності і складу населення, розподілу й використання трудових ресурсів, виробництва й розподілу суспільного продукту.

Статистику розділяють на описову і пояснювальну. *Описова статистика* займається добором кількісної інформації, необхідної (або цікавої) для різних людей. Такою є, наприклад, спортивна інформація, відомості про рівень заробітної платні, тривалість життя і дитячу смертність, коливання температури тощо. Перш ніж пояснювати великі масиви даних, їх потрібно узагальнити або згорнути. Наприклад, знайти середнє арифметичне й межі зміни певних кількісних характеристик. Саме це робить описова ститистика, що описує, узагальнює або зводить до бажаного виду властивості масивів даних. За допомогою *пояснювальної статистики* з отриманих статистичних результатів роблять певні висновки, будують прогнози. У процесі статистичного дослідження застосовують особливі прийоми вивчення, які в сукупності утворюють *статистичний метод.* Складовими елементами статистичного методу є масове спостереження, статистичне зведення, групування, обчислення середніх величин та індексів, побудова графіків.

*Генеральна сукупність* — поняття теорії статистичного вибіркового методу. В математичній статистиці генеральною сукупністю називають множину однорідних елементів, з якої за певним правилом виділяють підмножину, яку називають *вибіркою.* Наприклад, при статистичному контролі якості генеральна сукупність — множина

[1] Від латинського *status* — "стан, становище".

всіх виробів, що підлягають характеризації щодо тривалості безвідмовної роботи, відповідності стандартам тощо.

У математичній статистиці результати певних однорідних спостережень називають вибіркою навіть тоді, коли ці результати не відповідають поданому вище поняттю генеральної сукупності. Наприклад, результати вимірювання фізичної сталої[1], на які впливають випадкові похибки, називають вибіркою з нескінченної генеральної сукупності (вважають, що принципово можна провести нескінченну кількість вимірювань).

Поняття нескінченної генеральної сукупності не є логічно бездоганним і необхідним. Для розв'язування статистичних задач потрібна не сама генеральна сукупність, а лише певні характеристики відповідної функції розподілу. З точки зору теорії ймовірностей вибірка з нескінченної генеральної сукупності — спостереження кількох випадкових величин, що мають певний закон розподілу. Якщо ці величини незалежні й мають одну функцію розподілу, то їхні спостереження називають *простою вибіркою.* При такому поясненні терміна "вибірка" запровадження додаткового поняття генеральної вибірки зайве.

*Статистичне спостереження* — перший етап статистичного дослідження. На рис. 99 систематизовано види статистичних спостережень.

*Спостереження за часовою ознакою*

*Поточне* спостереження передбачає систематичне вивчення змін, що відбуваються в певній сукупності, відповідно до їхнього находження. Наприклад, реєстрація землетрусів.

*Періодичне* спостереження проводять через строго визначені інтервали часу — день, місяць, квартал, рік. Наприклад, щоденний облік відвідування учнів певного класу, облік успішності у школі за навчальний рік.

*Одиничне* спостереження проводять у разі потреби в певний момент за особливим завданням. Наприклад, перепис населення Римської імперії проводився за розпорядженням імператора.

---

[1] Фраза не є коректною з точки зору фізика: *під час фізичного експерименту вимірюють лише дві величини — час і відстань (переміщення).*

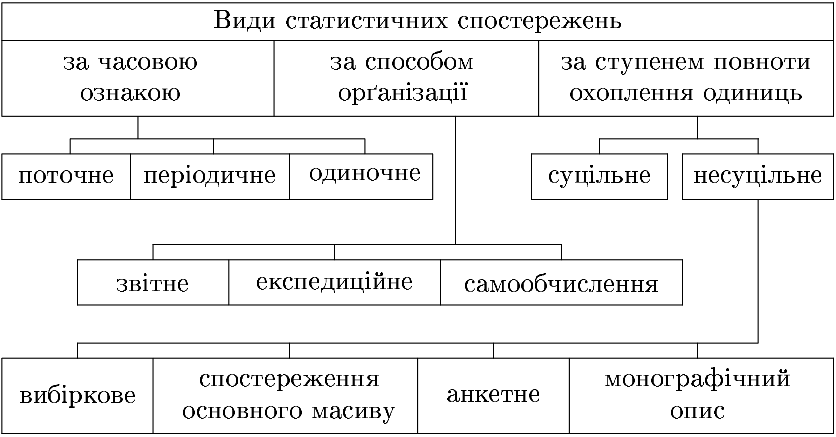



*Рис. 99.* Види статистичних спостережень.

*Спостереження за способом організації*

*Звітне* спостереження — вивчення певних явищ і процесів на основі статистичних відомостей, які містяться у різній звітності. Таким чином державні органи за встановленими законом формами статистичної звітності визначають об'єм валового національного продукту.

Під час *експедиційного* спостереження обліковці обходять закріплені за ними ділянки території і здійснюють там реєстрацію. Наприклад, під час перепису населення.

Спостереження за допомогою *самообчислення* полягає в тому, що представники статистичних органів роздають населенню або установам статистичні формуляри, які періодично через певні інтервали часу збирають і потім опрацьовують для отримання узагальнених даних.

*Спостереження за ступенем повноти охоплення одиниць*

У *суцільному* спостереженні реєструють ознаку всіх без винятку одиниць, що входять до сукупності, яку вивчають. Наприклад, під час перепису населення.

*Несуцільним* називають такий вид спостереження, під час якого реєструють ознаки лише частини одиниць досліджуваної сукупності і за частиною роблять висновок про всю сукупність. Видами несуцільного спостереження є: вибіркове спостереження, спостереження основного масиву, анкетне спостереження і монографічний опис.

Найпоширеніший з видів несуцільного спостереження — *вибіркове* спостереження. Всю сукупність, з якої роблять вибір одиниць спостереження, вважають генеральною. Сукупність одиниць, відібраних для вибіркового спостереження, називають *вибіркою*. Під час вібіркового спостереження обстеженню підлягає відібрана певним чином частина одиниць усієї сукупності, а результати обстеження цієї частини сукупності поширюються на всю сукупність загалом.

Розрізняють три способи відбору одиниць сукупності:

а) *випадковий відбір* — усі одиниці сукупності мають однакову можливість потрапити у вибірку. Відбір здійснюється з усієї сукупності жеребкуванням;

б) *механічний відбір* — одиниці спостереження відбирають у певному порядку. Наприклад, під час механічного відбору при вивченні якості продукції беруть кожну десяту або двадцяту деталь;

в) *типовий видбір* — всю масу одиниць, які вивчають, розчленовують на дрібні однорідні групи і здійснюють відбір "представників" кожної групи у випадковому або механічному порядку. Наприклад, під час вивчення уподобань виборців їх попередньо розподіляють на групи за соціальним станом і походженнням, рівнем прибутків.

Поширюючи дані вибіркового спостереження на всю генеральну сукупність, застосовують два способи: прямого перерахунку й коефіцієнтів коригування. Перший спосіб полягає в тому, що результати вибіркового спостереження вважають істинними і для генеральної сукупності. Другий спосіб застосовують під час уточнення результатів суцільного спостереження. Суть його полягає в тому, що дані вибіркового обстеження зіставляють з даними суцільного спостереження і визначають коефіцієнт розходження.

*Спостереження основного масиву* передбачає облік лише частини одиниць певної сукупності, що має переважну питому вагу. Наприклад, вивчення цін на ринках, які мають найбільшу питому вагу в оборотах торгівлі.

*Анкетне* спостереження ненадійне, бо частина анкет не повертається. Його використовують, наприклад, транспортні організації та органи зв'язку для вивчення ефективності обслуговування населення.

*Монографічний опис* полягає в тому, що для обстеження беруть один об'єкт, який докладно вивчають. Прикладом такого опису є історія хвороби пацієнта лікувального закладу.

Важливу частину статистичних методів становлять планування й аналіз експериментів, спрямованих на виявлення й перевірку причинних зв'язків між змінними. Планування експериментів спирається на поєднання елементарної логіки, теорії ймовірностей та беззаперечних положень природничих дисциплін. Статистичні дослідження проводять за таким планом:

а) формулювання завдання дослідження, визначення обсягу, місця і часу для потрібної вибірки;

б) збір необхідних даних;

в) опрацювання зібраних даних, їхнє графічне подання.

На етапі а) важливо чітко визначити мету дослідження, встановити, які об'єкти вивчатимуть і в якій кількості (обсяг вибірки). Необхідно встановити, які ознаки при цьому братимуть до уваги, які кількісні та якісні характеристики об'єктів потрібно оцінити.

На етапі б) використовують різні методи збирання даних: спостереження, порівняння, усне і письмове анкетування.

На етапі в) результати статистичних досліджень опрацьовують і подають у вигляді таблиць, діаграм та графіків. За результатами виконаної роботи роблять певні висновки.

## 16.2. Статистичні таблиці

Статистичні таблиці мають підмет і присудок.

*Статистичний підмет* — та сукупність ознак об'єктів, про яку йдеться в таблиці. Як правило, він розташовується в лівій частині таблиці.

*Статистичний присудок* — ті ознаки або показники, які характеризують статистичний підмет. Він розміщується в заголовках стовпців. За структурою підмета статистичні таблиці поділяються на:

- *прості* — підмет є переліком окремих об'єктів (назви підприємств, міст, областей, країн і т. ін.) (див. табл. 10–12);
- *групові* — у підметі одиниці сукупності групуються за певною ознакою;
- *комбінаційні* — у підметі одиниці групуються за двома й більше ознаками, пов'язаними між собою.

*Таблиця 10*

Оптимальна вологість ґрунтів

| Ґрунт | Вологість, % |
|---|---|
| Піщаний | 8–12 |
| Супіщаний | 9–15 |
| Пилуватий | 16–22 |
| Суглинковий | 12–15 |
| Важкий суглинковий | 16–20 |
| Глинистий | 19–23 |

*Таблиця 11*

Співвідношення витрат робочого часу на виконання трудових функцій

| Трудові функції робітника | Питома вага відповідних елементів робочого часу, % | | |
|---|---|---|---|
| | Наладчик | Оператор | Наладчик токарних автоматів |
| Робочий час | 100 | 100 | 100 |
| Активне спостереження й регулювання режиму з пульта управління | 59,7 | 33,9 | 54,7 |
| Машинно-ручне управління | 5,3 | 46,0 | 2,2 |
| Суто ручна праця | 18,7 | 16,3 | 0,5 |
| Налагоджування, підналагоджування, зміна інструмента, контроль продукції | 16,3 | 3,8 | 42,6 |

*Таблиця 12*

Зміни за день у пам'яті, увазі, швидкості реакції

| | Випробування, % | | Різниця, % |
|---|---|---|---|
| | ранкові | вечірні | |
| Пам'ять | 100 | 73,9 | –20,7 |
| Обсяг уваги | 100 | 72,7 | –27,3 |
| Швидкість реакції | 100 | 83,4 | –16,6 |
| Помилки | 100 | 111,1 | –11,1 |

Якщо групування здійснено за інтервалами зміни ознаки, то таке групування називають *інтервальним* (див. табл. 13).

*Таблиця 13*

Результати вибіркового вимірювання врожайності жита

| Врожайність, ц/га | 21–23 | 23–25 | 25–27 | 27–31 | 31–33 | 33–35 | Всього |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Площа, га | 100 | 150 | 250 | 300 | 250 | 150 | 1200 |

Подавши результат групування рядом значень змінної або інтервалів зміни, розташованих у порядку зростання, і рядом відповідних частот (випадків), отримаємо *варіаційний ряд* (відповідно *дискретний* [1] (див. табл. 14) або *інтервальний* (див. табл. 13)).

*Таблиця 14*

Варіаційний ряд результатів 35 абітурієнтів на трьох іспитах

| Кількість балів | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість абітурієнтів | 5 | 3 | 5 | 6 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 |

У табл. 14 відображено випадок, коли студенти отримали, наприклад, таку кількість балів: 10, 10, 11, 9, 15, 12, 9, 12, 13, 9, 8, 11, 14, 13, 12, 9, 10, 14, 10, 7, 8, 7, 9, 11, 15, 12, 7, 10, 7, 7, 8, 13, 13, 14, 10.

[1] Від латинського *discretus* — "роздільний, перервний".

## 16.3. Наочне подання частот

Для наочного подання частот користуються графічним зображенням варіаційних рядів — *діаграмами*[2]: круговою, кільцевою та іншими, графіком, полігоном і гістограмою. Наприклад, при викладанні географії за допомогою кругових діаграм подають співвідношення площ суходолу й поверхні світового океану, об'ємів валового національного продукту окремих країн та регіонів.

*Гістограму* — рисунок для графічного зображення інтервального варіаційного ряду — будують таким чином: на осі абсцис відкладають інтервали значень ознаки й на кожному з них як на основі будують прямокутник з висотою, пропорційною до частоти інтервалу чи значення (див. рис. 100).

Для ліпшого сприйняття бажано, щоб:

- кількість інтервалів була в межах від 8 до 25, якщо кількість випробувань не перевищує 50;
- відношення висоти гістограми до її ширини було 3:5.

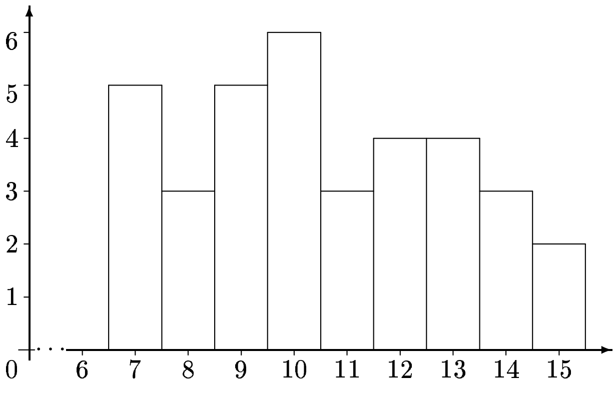



*Рис. 100.* Гістограма, побудована за варіаційним рядом результатів абітурієнтів на іспитах (див. табл. 14).

---

[2]Від грецького $\delta\iota\alpha\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$ — "малюнок, фігура".

У разі дискретного розподілу на осі абсцис відкладають окремі значення ознаки. Гістограму зображують також у формі контура, а не окремими стовпцями.

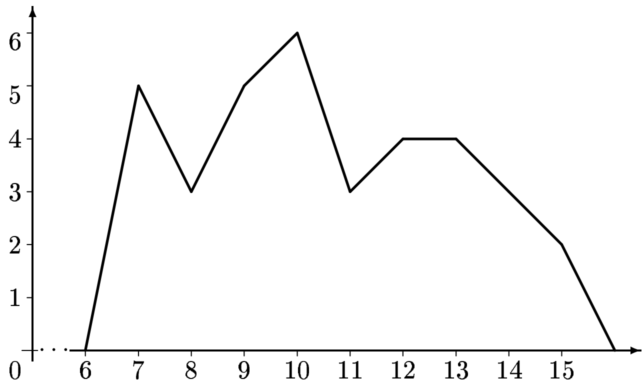



*Рис. 101.* Полігон, побудований за варіаційним рядом результатів абітурієнтів на іспитах (див. табл. 14).

Побудова *полігона* розподілу нагадує побудову гістограми. У гістограмі кожний стовпчик закінчується горизонтальною лінією, причому на висоті, пропорційній до частоти в цьому розряді. У полігоні він закінчується точкою над серединою свого розрядного інтервалу на такій самій висоті. Для побудови полігона варіаційного ряду на осі абсцис прямокутної системи координат відкладають інтервали значень ознаки й у серединах інтервалів ставлять перпендикуляри, довжини яких пропорційні до відповідних частот. Потім кінці сусідніх перпендикулярів сполучають відрізками прямих, а кінці крайніх перпендикулярів сполучають із серединами сусідніх інтервалів, частоти яких дорівнюють нулю. В результаті отримують ламану, яку називають полігоном (див. рис. 101). Інколи замість гістограми чи полігона за вершинами полігона будують згладжену криву.

Гістограма — найлегша для сприймання форма, тому їй надають перевагу, коли зображують не більше, ніж один розподіл. Однак якщо потрібно порівняти два або більше розподілів, то для цього ліпше підходять полігони частот, бо їх можна накласти один на одного при меншому перетині ліній.

## 16.4. Завдання математичної статистики

Завдання математичної статистики полягає в тому, щоб на підставі властивостей сукупності елементів, узятих з генеральної сукупності, зробити певні висновки про властивості всієї генеральної сукупності.

Властивість певної генеральної сукупності може виражатися деякою випадковою величиною $\xi$. У разі кількісної ознаки $\xi$ є самою ознакою (наприклад, максимальні лінійні розміри істоти певного біологічного виду, кількість елементарних частинок, зареєстрованих лічильником за одиницю часу, ціна акцій компанії на біржі).

Для якісної ознаки, наприклад типу "справний-несправний" (прилад), $\xi$ можна означити так:

- $\xi = 0$, якщо "несправний";
- $\xi = 1$, якщо "справний".

Випадковою вибіркою об'єму $n$ називають вибір об'єктів з генеральної сукупності, причому вибір окремих об'єктів здійснюється незалежно один від одного. Результат випадкової вибірки об'єму $n$ — сукупність $(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)$ значень ознаки. Нехай, наприклад, сукупність $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1)$ є вибіркою об'єму 10 з партії телевізорів для випадкової величини $\xi$, означеної вище. Тоді у партії 7 справних і 3 несправних телевізори.

Вибіркове спостереження застосовують для контролю за якістю продукції, використанням основних фондів і робочого часу, для вивчення добробуту населення і його купівельної спроможності та ін. В окремих випадках можливе винятково вибіркове спостереження. Наприклад, здійснюючи контроль за якістю фотоплівки чи фотопаперу, не вдаються до засвічування всієї виготовленої продукції, а застосовують вибірковий метод. Аналогічно діють, перевіряючи міцність тканини на розрив.

Статистичні методи широко застосовують у *теорії надійності* — прикладній дисципліні, що вивчає питання інженерного, економічного й виробничо-організаційного характеру. Теорія надійності, використовуючи апарат теорії ймовірностей і математичної статистики, дає змогу визначити ймовірність передчасного виходу з ладу певних технічних виробів, наприклад, комп'ютерів. Тривалість безвідмовної роботи характеризується не числом, а розподілом імовірностей, тобто сукупністю можливих значень та ймовірностей того, що тривалість безвідмовної роботи дорівнюватиме відповідному значенню. Наприклад, гарантія роботи телевізора протягом 20 років зовсім не означає, що кожний телевізор ці 20 років працюватиме абсолютно безвідмовно. Це лише означає: характеристики генеральної сукупності телевізорів даної марки такі, що гарантійний ремонт за даних цін на продукцію економічно виправданий.

Результати вибіркового спостереження характеризують усю генеральну сукупність лише наближено: зведені результати вибірки майже ніколи не збігаються зі зведеними показниками генеральної сукупності. Різницю між зведеними показниками вибіркової і генеральної сукупності називають або *похибками вибірки,* або *похибками репрезентативності.* Повністю уникнути цих похибок неможливо, їх можна зробити як завгодно малими шляхом вибору достатньо великого обсягу вибірки. Границі похибок визначають на основі теорії ймовірностей.

# Предметний покажчик

# Позначення

НСД найбільший спільний дільник (58)

НСК найменше спільне кратне (66)

$(a; b)$ впорядкована пара (14), інтервал (83)

$[a; b]$ відрізок (83)

$[a; b)$ або $(a; b]$ проміжок (83)

$\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$ вектор (123)

$a^n$ степінь дійсний (115), натуральний (39), раціональний (115)

$A_n^k$ кількість розміщень без повторень по $k$ елементів з $n$ (45)

arccos арккосинус (189)

arcctg арккотангенс (190)

arcsin арксинус (188)

arctg арктангенс (190)

$\mathbb{C}$ поле комплексних чисел (314)

ch гіперболічний косинус (194)

$C_n^k$ кількість комбінацій елементів з $n$ по $k$ (46)

ch косинус гіперболічний (194)

cos косинус (180)

cosec косеканс (180)

ctg котангенс (180)

det визначник 2-го порядку (143), 3-го порядку (145)

$D(f)$ область визначення функції $f$ (16)

$df/dx$ похідна функції $f$ (244)

$e$ число Ейлера (110)

$f'$ похідна функції $f$ (244)

$f''$ друга похідна функції $f$ (245)

$f(x)$ значення функції $f$ (15)

$f(X)$ область значень функції $f$, визначеної на множині $X$ (16)

$\int f(x)\,dx$ невизначений інтеграл (285)

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ визначений інтеграл (290)

$i$ уявна одиниця (313)

Im уявна частина (314)