Подільність і корені многочленів

Приклад подання навчального матеріалу презентацією у форматі pdf

Олександр Рудик

КУ ім. Б.Грінченка

27 березня 2020 р.

План доповіді

1. Схема Горнера
   - Мотивація запровадження
   - Подання таблицею

План доповіді

1. Схема Горнера
   - Мотивація запровадження
   - Подання таблицею
2. Ділення многочленів з лишком
   - Можливість ділення многочленів з лишком
   - Запис ділення многочленів з лишком
   - Схема Горнера як запис ділення на двочлен
   - Демонстрація роботи

План доповіді

1. Схема Горнера
   - Мотивація запровадження
   - Подання таблицею
2. Ділення многочленів з лишком
   - Можливість ділення многочленів з лишком
   - Запис ділення многочленів з лишком
   - Схема Горнера як запис ділення на двочлен
   - Демонстрація роботи
3. Застосування
   - Обчислення величини многочлена
   - Розкладання за степенями двочлена
   - Кратність кореня

План доповіді

1. Схема Горнера
   - Мотивація запровадження
   - Подання таблицею
2. Ділення многочленів з лишком
   - Можливість ділення многочленів з лишком
   - Запис ділення многочленів з лишком
   - Схема Горнера як запис ділення на двочлен
   - Демонстрація роботи
3. Застосування
   - Обчислення величини многочлена
   - Розкладання за степенями двочлена
   - Кратність кореня
4. Раціональні корені многочлена
   - Основа перебору
   - Лема для оптимізації перебору
   - Основа оптимізації перебору
   - Приклад розв’язання рівняння

План доповіді

Мотивація запровадження

Для зменшення кількості виконуваних операцій
і відповідно зменшення ймовірності помилки
обчислювати значення многочлена:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{n-1} x^{n-1} + f_n x^n = \\ &= f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_2 x^2 + f_1 x + f_0 \end{aligned}$$

зручно за такою формулою:

$$f(c) = ((\cdots((f_n c + f_{n-1})c + a_{n-2})c + \cdots)c + a_1)c + a_0.$$

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	$\cdots$	f_0

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;
- елемент 2-го рядка, починаючи від 3-го елемента, дорівнює сумі елемента таблиці над обчислюваним елементом і попереднім елементом рядка, помноженим на c, що є 1-им елементом 2-го рядка.

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	$\cdots$	f_0
c	f_n				

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;
- елемент 2-го рядка, починаючи від 3-го елемента, дорівнює сумі елемента таблиці над обчислюваним елементом і попереднім елементом рядка, помноженим на c, що є 1-им елементом 2-го рядка.

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	$\cdots$	f_0
c	f_n	$f_{n-1} + cf_n$			

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;
- елемент 2-го рядка, починаючи від 3-го елемента, дорівнює сумі елемента таблиці над обчислюваним елементом і попереднім елементом рядка, помноженим на c, що є 1-им елементом 2-го рядка.

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	$\cdots$	f_0
c	f_n	$f_{n-1}+cf_n$	$f_{n-2}+c(f_{n-1}+cf_n)$		

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;
- елемент 2-го рядка, починаючи від 3-го елемента, дорівнює сумі елемента таблиці над обчислюваним елементом і попереднім елементом рядка, помноженим на c, що є 1-им елементом 2-го рядка.

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	$\cdots$	f_0
c	f_n	$f_{n-1}+cf_n$	$f_{n-2}+c(f_{n-1}+cf_n)$	$\dots$	$f_0+c(\dots(f_{n-1}+cf_n)\dots$

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;
- елемент 2-го рядка, починаючи від 3-го елемента, дорівнює сумі елемента таблиці над обчислюваним елементом і попереднім елементом рядка, помноженим на c, що є 1-им елементом 2-го рядка.

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	$\dots$	f_0
c	f_n	$f_{n-1} + cf_n$	$f_{n-2} + c(f_{n-1} + cf_n)$	$\dots$	$f_0 + c(\dots(f_{n-1} + cf_n)\dots$

Таку таблицю і відповідний алгоритм називають схемою Горнера.

Подання таблицею

Проміжні й остаточні результати записують у таблицю, в якій:

- елементи 1-го рядка, починаючи від 2-го елемента, — коефіцієнти многочлена, записані у порядку спадання степеня змінної;
- елемент 2-го рядка, починаючи від 3-го елемента, дорівнює сумі елемента таблиці над обчислюваним елементом і попереднім елементом рядка, помноженим на c, що є 1-им елементом 2-го рядка.

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	...	f_0
c	f_n	$f_{n-1} + cf_n$	$f_{n-2} + c(f_{n-1} + cf_n)$	...	$f_0 + c(...(f_{n-1} + cf_n)...$

Таку таблицю і відповідний алгоритм називають схемою Горнера.

Історична довідка

Вільямс Джонс Горнер (1786–1837) — англійський математик. Працював у галузі алгебри.

План доповіді

Теорема

У множині многочленів над довільним полем можна ділити з лишком на відмінні від 0 многочлени так, щоб лишок дорівнював 0 або його степінь був менший, ніж степінь дільника.

Теорема

У множині многочленів над довільним полем можна ділити з лишком на відмінні від 0 многочлени так, щоб лишок дорівнював 0 або його степінь був менший, ніж степінь дільника.

Доведення

Використаємо метод математичної індукції за степенем діленого для дільника $f(x)$ степеня n зі старшим коефіцієнтом $f_n \neq 0$.

Теорема

У множині многочленів над довільним полем можна ділити з лишком на відмінні від 0 многочлени так, щоб лишок дорівнював 0 або його степінь був менший, ніж степінь дільника.

Доведення

Використаємо метод математичної індукції за степенем діленого для дільника $f(x)$ степеня n зі старшим коефіцієнтом $f_n \neq 0$.

База індукції

Якщо степінь дільника більший, ніж степінь діленого, то частка дорівнює нулю, а лишок — діленому.

Теорема

У множині многочленів над довільним полем можна ділити з лишком на відмінні від 0 многочлени так, щоб лишок дорівнював 0 або його степінь був менший, ніж степінь дільника.

Доведення

Використаємо метод математичної індукції за степенем діленого для дільника $f(x)$ степеня n зі старшим коефіцієнтом $f_n \neq 0$.

База індукції

Якщо степінь дільника більший, ніж степінь діленого, то частка дорівнює нулю, а лишок — діленому.

Припущення індукції

Припустимо, що для всіх многочленів, степінь яких не перевищує m, існує подання сумою: $f(x) \cdot q(x) + r(x)$, де $q(x)$ та $r(x)$ — многочлени змінної x, причому $r(x) = 0$ або степінь $r(x)$ менший, ніж n.

Можливість ділення многочленів з лишком

Крок індукції

Нехай $g(x) = b_{m+1}x^{m+1} + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ — довільний многочлен при $m+1 \geq n$, $b_{m+1} \neq 0$. Маємо:

Можливість ділення многочленів з лишком

Крок індукції

Нехай $g(x) = b_{m+1}x^{m+1} + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ — довільний многочлен при $m+1 \geq n$, $b_{m+1} \neq 0$. Маємо:

$$g(x) = \frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} f(x) + \left(g(x) - \frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} f(x) \right),$$

де вираз у дужках — многочлен, степінь якого не перевищує m, для якого за припущенням індукції існує подання сумою $f(x) \cdot q(x) + r(x)$.

Можливість ділення многочленів з лишком

Крок індукції

Нехай $g(x) = b_{m+1}x^{m+1} + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ — довільний многочлен при $m + 1 \geq n$, $b_{m+1} \neq 0$. Маємо:

$$g(x) = \frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} f(x) + \left(g(x) - \frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} f(x) \right),$$

де вираз у дужках — многочлен, степінь якого не перевищує m, для якого за припущенням індукції існує подання сумою
$f(x) \cdot q(x) + r(x)$.

$$g(x) = f(x) \left(\frac{b_{m+1}x^{m+1-n}}{a_n} + q(x) \right) + r(x),$$

де $q(x)$ та $r(x)$ — многочлени змінної x, причому $r(x) = 0$ або степінь $r(x)$ менший, ніж n.

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — “у стовпчик”.

Приклад

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — “у стовпчик”.

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 \;\big|\; \underline{2x^2 - 3x + 1}$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — “у стовпчик”.

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2} & 3x^3 \end{array}$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$\begin{array}{r|l} -\; 6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{6x^5 - 9x^4 + 3x^3} \qquad\qquad\qquad\quad & 3x^3 \end{array}$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} - & 6x^5 - 17x^4 & + & 25x^3 & - 31x^2 + 13x + 10 & & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{7-7} & 6x^5 - \ \ 9x^4 & + & 3x^3 & & & 3x^3 \\ \cline{2-4} & - \ \ 8x^4 & + & 22x^3 & - 31x^2 & & \end{array}$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; 6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5 - 9x^4 + 3x^3} \qquad\qquad\qquad\quad & 3x^3 - 4x^2 \\
- 8x^4 + 22x^3 - 31x^2 \qquad\qquad &
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\; 6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{6x^5 - 9x^4 + 3x^3} & 3x^3 - 4x^2 \\
\quad \_\; -8x^4 + 22x^3 - 31x^2 & \\
\qquad \underline{-8x^4 + 12x^3 - 4x^2} &
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — “у стовпчик”.

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5 - 9x^4 + 3x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad & 3x^3 - 4x^2 \\
-\;- 8x^4 + 22x^3 - 31x^2 \qquad\qquad\quad & \\
\underline{- 8x^4 + 12x^3 - 4x^2} \qquad\qquad\quad & \\
10x^3 - 27x^2 + 13x \qquad\quad &
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само,
як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
\_\; & 6x^5 & -\;17x^4 & +\;25x^3 & -\;31x^2 & +\;13x & +\;10 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\cline{8-8}
 & 6x^5 & -\;9x^4 & +\;3x^3 & & & & 3x^3 - 4x^2 + 5x \\
\cline{2-4}
 & \_ & -\;8x^4 & +\;22x^3 & -\;31x^2 & & & \\
 & & -\;8x^4 & +\;12x^3 & -\;4x^2 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 10x^3 & -\;27x^2 & +\;13x & &
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
\_ & 6x^5 & -17x^4 & +25x^3 & -31x^2 & +13x & +10 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\cline{8-8}
 & 6x^5 & -9x^4 & +3x^3 & & & & 3x^3 - 4x^2 + 5x \\
\cline{2-4}
 & \_ & -8x^4 & +22x^3 & -31x^2 & & & \\
 & & -8x^4 & +12x^3 & -4x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & \_ & 10x^3 & -27x^2 & +13x & & \\
 & & & 10x^3 & -15x^2 & +5x & & \\
\cline{3-6}
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\; 6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\quad 6x^5 - 9x^4 + 3x^3 & \overline{3x^3 - 4x^2 + 5x} \\
\qquad \_\; -8x^4 + 22x^3 - 31x^2 & \\
\qquad\quad -8x^4 + 12x^3 - 4x^2 & \\
\qquad\qquad \_\; 10x^3 - 27x^2 + 13x & \\
\qquad\qquad\quad 10x^3 - 15x^2 + 5x & \\
\qquad\qquad\qquad -12x^2 + 8x + 10 &
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — “у стовпчик”.

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & 6x^5 - 17x^4 & + 25x^3 & - 31x^2 & + 13x & + 10 & & 2x^2 - 3x + 1 \\
\cline{8-8}
 & 6x^5 - 9x^4 & + 3x^3 & & & & & 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \\
\cline{2-3}
- & -8x^4 & + 22x^3 & - 31x^2 & & & & \\
 & -8x^4 & + 12x^3 & - 4x^2 & & & & \\
\cline{2-4}
 & - & 10x^3 & - 27x^2 & + 13x & & & \\
 & & 10x^3 & - 15x^2 & + 5x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & -12x^2 & + 8x & + 10 & &
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — "у стовпчик".

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{}\ 6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{6x^5 - 9x^4 + 3x^3} & 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \\
\qquad \underline{}\ -8x^4 + 22x^3 - 31x^2 & \\
\qquad \quad \underline{-8x^4 + 12x^3 - 4x^2} & \\
\qquad \qquad \underline{}\ 10x^3 - 27x^2 + 13x & \\
\qquad \qquad \quad \underline{10x^3 - 15x^2 + 5x} & \\
\qquad \qquad \qquad \underline{}\ -12x^2 + 8x + 10 & \\
\qquad \qquad \qquad \quad \underline{-12x^2 + 18x - 6} &
\end{array}
$$

Запис ділення многочленів з лишком

Ділення з остачею у многочленів здійснюється так само, як і ділення цілих чисел — “у стовпчик”.

Приклад

Подання: $6x^5 - 17x^4 + 25x^3 - 31x^2 + 13x + 10 =$
$= (2x^2 - 3x + 1)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) - 10x + 16$ —
отримують у результаті виконання таких дій:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
- & 6x^5 - 17x^4 & + 25x^3 & - 31x^2 & + 13x & + 10 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{7-7}
 & 6x^5 - 9x^4 & + 3x^3 & & & & 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \\ \cline{2-3}
- & - 8x^4 & + 22x^3 & - 31x^2 & & & \\
 & - 8x^4 & + 12x^3 & - 4x^2 & & & \\ \cline{2-4}
- & & 10x^3 & - 27x^2 & + 13x & & \\
 & & 10x^3 & - 15x^2 & + 5x & & \\ \cline{3-5}
- & & & - 12x^2 & + 8x & + 10 & \\
 & & & - 12x^2 & + 18x & - 6 & \\ \cline{4-6}
 & & & & - 10x & + 16 &
\end{array}
$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x - c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких

$f(x) = (x - c)q(x) + r.$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x) = (x-c)q(x) + r$. Запишемо останню рівність детально:

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-c)\left(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}\right)+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x) = (x-c)q(x) + r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n =$$

$$= (x - c)\left(q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}\right) + r\,.$$

Прирівняємо коефіцієнти при одинакових степенях:

x^n :

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-c)\left(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}\right)+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти при одинакових степенях:

$x^n:\qquad f_0=\ q_0$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n =$$

$$= (x - c)\,(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r\,.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{aligned} x^n &: \quad f_0 = q_0 \\ x^{n-1} &: \end{aligned}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ \ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-\ c)\ (q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1})+r\,.$$

Прирівняємо коефіцієнти при одинакових степенях:

$$\begin{array}{rl} x^n: & f_0=\ q_0 \\ x^{n-1}: & f_1=\ q_1-cq_0 \end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-c)\left(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}\right)+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{rl} x^n: & f_0 = q_0 \\ x^{n-1}: & f_1 = q_1 - cq_0 \\ x^{n-2}: & \end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-c)\left(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}\right)+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти при одинакових степенях:

$$\begin{array}{rcl} x^n: & & f_0 = q_0 \\ x^{n-1}: & & f_1 = q_1 - cq_0 \\ x^{n-2}: & & f_2 = q_2 - cq_1 \end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ \ldots+\ f_{n-1}x\ +f_n=$$

$$=(x-\ c)\ (q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+\ q_{n-2}x\ +q_{n-1})+r\,.$$

Прирівняємо коефіцієнти при одинакових степенях:

$$\begin{array}{rrl}
x^n: & f_0= & q_0\\
x^{n-1}: & f_1= & q_1-cq_0\\
x^{n-2}: & f_2= & q_2-cq_1\\
 & & \ldots
\end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ \ldots+f_{n-1}x\ +f_n=$$

$$=(x-\ c)\ (q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x\ +q_{n-1}\ )+r\,.$$

Прирівняємо коефіцієнти при одинакових степенях:

$$\begin{array}{rrl}
x^n: & f_0= & q_0\\
x^{n-1}: & f_1= & q_1-cq_0\\
x^{n-2}: & f_2= & q_2-cq_1\\
 & & \ldots\\
x^1: & &
\end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ \ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-\ c)\ (q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1})+r\,.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{rrl}
x^n: & f_0 = & q_0 \\
x^{n-1}: & f_1 = & q_1 - cq_0 \\
x^{n-2}: & f_2 = & q_2 - cq_1 \\
 & & \ldots \\
x^1: & f_{n-1} = & q_{n-1} - cq_{n-2}
\end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-c)\left(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}\right)+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{rrl}
x^n: & f_0 = & q_0 \\
x^{n-1}: & f_1 = & q_1-cq_0 \\
x^{n-2}: & f_2 = & q_2-cq_1 \\
 & & \ldots \\
x^1: & f_{n-1} = & q_{n-1}-cq_{n-2} \\
x^0: & &
\end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-c)\,(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1})+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{rrcl}
x^n: & f_0 & = & q_0\\
x^{n-1}: & f_1 & = & q_1-cq_0\\
x^{n-2}: & f_2 & = & q_2-cq_1\\
 & & & \ldots\\
x^1: & f_{n-1} & = & q_{n-1}-cq_{n-2}\\
x^0: & f_n & = & r-cq_{n-1}
\end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x)=(x-c)q(x)+r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+f_{n-1}x+f_n=$$

$$=(x-c)\left(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}\right)+r.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{rrcl}
x^n: & f_0 = q_0 & \Longrightarrow & q_0 = f_0 \\
x^{n-1}: & f_1 = q_1-cq_0 & \Longrightarrow & q_1 = cq_0+f_1 \\
x^{n-2}: & f_2 = q_2-cq_1 & \Longrightarrow & q_2 = cq_1+f_2 \\
 & \ldots & & \\
x^1: & f_{n-1} = q_{n-1}-cq_{n-2} & \Longrightarrow & q_{n-1} = cq_{n-2}+f_{n-1} \\
x^0: & f_n = r-cq_{n-1} & \Longrightarrow & r = cq_{n-1}+f_n
\end{array}$$

Схема Горнера як запис ділення на двочлен

Поділити з лишком многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-c)$ означає знайти такі многочлен $q(x)$ і число r, при яких $f(x) = (x-c)q(x) + r$. Запишемо останню рівність детально:

$$f_0x^n + f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + \ldots + f_{n-1}x + f_n =$$

$$= (x - c)\left(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}\right) + r\,.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{rrll}
x^n: & f_0 = & q_0 & \Longrightarrow \quad q_0 = f_0 \\
x^{n-1}: & f_1 = & q_1 - cq_0 & \Longrightarrow \quad q_1 = cq_0 + f_1 \\
x^{n-2}: & f_2 = & q_2 - cq_1 & \Longrightarrow \quad q_2 = cq_1 + f_2 \\
 & & \ldots & \\
x^1: & f_{n-1} = & q_{n-1} - cq_{n-2} & \Longrightarrow \quad q_{n-1} = cq_{n-2} + f_{n-1} \\
x^0: & f_n = & r - cq_{n-1} & \Longrightarrow \quad r = cq_{n-1} + f_n
\end{array}$$

Праворуч — запис дій згідно зі схемою Горнера.

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

	f_0	f_1	f_2	f_3
	1	-5	0	8
2				
c				

Запишемо у верхньому рядку коефіцієнти початкового многочлена f_0, f_1, f_2, f_3. При діленні на $(x - c)$ у нижньому рядку ліворуч пишемо c.

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ & & \boxed{1} & \boxed{-5} & \boxed{0} & \boxed{8} \\ \\ \boxed{2} & & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ c & & q_0 & q_1 & q_2 & r \end{array}$$

Готуємо у нижньому рядку порожні клітини для лишку r
і коефіцієнтів частки q_0, q_1, q_2.

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

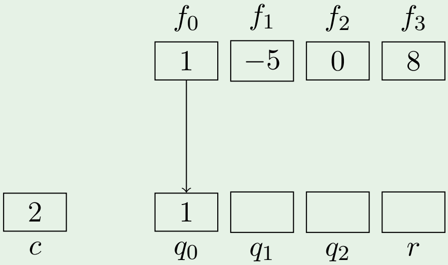
	f_0	f_1	f_2	f_3
	1	-5	0	8
2				
c	q_0	q_1	q_2	r

$q_0 = f_0 =$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

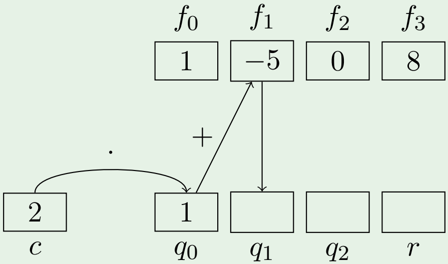


$q_0 = f_0 = 1$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

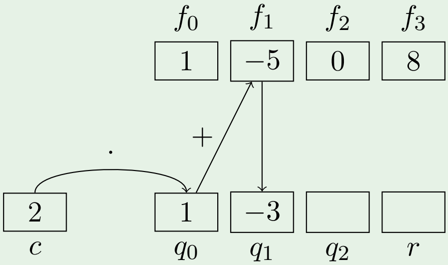


$q_1 = c \cdot q_0 + f_1 = 2 \cdot 1 - 5 =$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

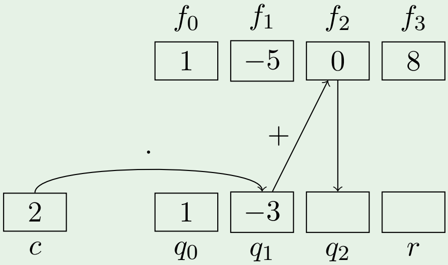


$q_1 = c \cdot q_0 + f_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

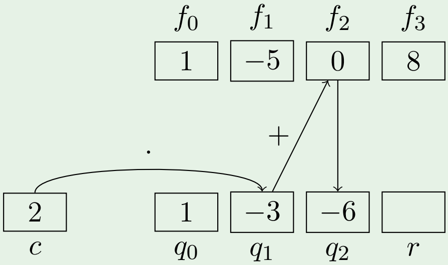


$q_2 = c \cdot q_1 + f_2 = 2 \cdot (-3) + 0 =$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.



$q_2 = c \cdot q_1 + f_2 = 2 \cdot (-3) + 0 = -6$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

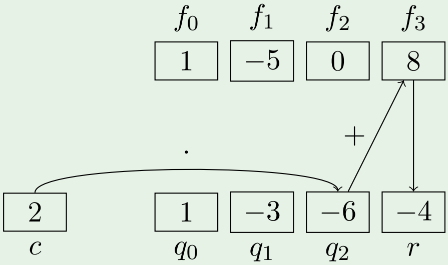
	f_0	f_1	f_2	f_3
	1	-5	0	8
2	1	-3	-6	
c	q_0	q_1	q_2	r

$r = c \cdot q_2 + f_3 = 2 \cdot (-6) + 8 =$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.



$r = c \cdot q_2 + f_3 = 2 \cdot (-6) + 8 = -4$

Демонстрація ділення на двочлен

Приклад

З допомогою схеми Горнера поділимо многочлен $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ на двочлен $x - 2$.

	f_0	f_1	f_2	f_3
	1	-5	0	8
2	1	-3	-6	-4
c	q_0	q_1	q_2	r

Відповідь: $q(x) = x^2 - 3x - 6, \quad r = -4,$
$f(x) = (x-2)(x^2 - 3x - 6) - 4.$

План доповіді

Обчислення величини многочлена

Многочлен $f(x)$ поділимо з лишком на $(x-c)$:

$$f(x) = q(x) \cdot (x-c) + r.$$

Обчислення величини многочлена

Многочлен $f(x)$ поділимо з лишком на $(x-c)$:

$$f(x) = q(x) \cdot (x-c) + r.$$

Підставимо в останню рівність c замість x. Маємо:

$$f(c) = \quad \text{(поміркуйте!)}$$

Обчислення величини многочлена

Многочлен $f(x)$ поділимо з лишком на $(x-c)$:

$$f(x) = q(x) \cdot (x-c) + r.$$

Підставимо в останню рівність c замість x. Маємо:

$$f(c) = r.$$

Обчислення величини многочлена

Многочлен $f(x)$ поділимо з лишком на $(x-c)$:

$$f(x) = q(x) \cdot (x-c) + r.$$

Підставимо в останню рівність c замість x. Маємо:

$$f(c) = r.$$

Теорема (Безу)

Величина многочлена $f(x)$ у точці c дорівнює лишку від ділення $f(x)$ на $(x-c)$.

Обчислення величини многочлена

Многочлен $f(x)$ поділимо з лишком на $(x-c)$:

$$f(x) = q(x)\cdot(x-c) + r.$$

Підставимо в останню рівність c замість x. Маємо:

$$f(c) = r.$$

Теорема (Безу)

Величина многочлена $f(x)$ у точці c дорівнює лишку від ділення $f(x)$ на $(x-c)$.

Приклад

Знайдемо величину $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ при $x = 3$:

	1	-3	7	-5
3	1	0	7	**16**

Відповідь: $f(3) = 16$.

Розкладання за степенями двочлена

Приклад

Використовуючи схему Горнера, разкладемо многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $(x + 2)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -2 & 4 \end{array}$$

$x^3 + 3x^2 - 2x + 4$

Розкладання за степенями двочлена

Приклад

Використовуючи схему Горнера, разкладемо многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $(x+2)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -4 & \boxed{12} \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = (x^2 + x - 4)(x+2) + 12 =$$

Розкладання за степенями двочлена

Приклад

Використовуючи схему Горнера, разкладемо многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $(x+2)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -4 & \boxed{12} \\ -2 & 1 & -1 & \boxed{\text{-2}} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 2x + 4 &= (x^2 + x - 4)(x+2) + 12 = \\ &= ((x-1)(x+2) - 2)(x+2) + 12 = \end{aligned}$$

Розкладання за степенями двочлена

Приклад

Використовуючи схему Горнера, разкладемо многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $(x + 2)$.

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & 3 & -2 & 4 \\
-2 & 1 & 1 & -4 & \boxed{12} \\
-2 & 1 & -1 & \boxed{\text{-2}} & \\
-2 & 1 & \boxed{\text{-3}} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3 + 3x^2 - 2x + 4 &= (x^2 + x - 4)(x + 2) + 12 = \\
&= ((x - 1)(x + 2) - 2)(x + 2) + 12 = \\
&= (((1 \cdot (x + 2) - 3)(x + 2) - 2)(x + 2) + 12 =
\end{aligned}
$$

Розкладання за степенями двочлена

Приклад

Використовуючи схему Горнера, разкладемо многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $(x + 2)$.

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & 3 & -2 & 4 \\
-2 & 1 & 1 & -4 & \boxed{12} \\
-2 & 1 & -1 & \boxed{-2} & \\
-2 & 1 & \boxed{-3} & & \\
-2 & \boxed{1} & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3 + 3x^2 - 2x + 4 &= (x^2 + x - 4)(x + 2) + 12 = \\
&= ((x - 1)(x + 2) - 2)(x + 2) + 12 = \\
&= (((1 \cdot (x + 2) - 3)(x + 2) - 2)(x + 2) + 12 = \\
&= (x + 2)^3 - 3(x + 2)^2 - 2(x + 2) + 12.
\end{aligned}
$$

Історична довідка

Етьєн Безу (1730–1783) — французький математик. Зробив внесок у теорію лінійних рівнянь і визначників. Розвинув теорію виключення змінних із систем рівнянь вищих степенів.

Кратність кореня

Наслідок (теореми Безу)

- Якщо — корінь многочлена $f(x)$, то $f(x)$ ділиться без остачі на $(x - c)$.
- Кількість коренів многочлена не перевищує степеня многочлена.

Означення

- b є дільником a (позначають так: $a \vdots b$ або $b \mid a$), якщо існує таке c, що а дорівнює добутку bc: $a \vdots b \Leftrightarrow b \mid a \Leftrightarrow \exists\, c \quad a = bc$. У даному разі кажуть, що а є кратним b, а ділиться на b без лишку.
- c є коренем многочлена $f(x)$ натуральної кратності k, якщо $f(x) \vdots (x - c)^k$, але $f(x) \not\vdots (x - c)^{k+1}$.

Щоб знайти кратність кореня c, достатньо поділити многочлен на лінійний вираз $(x - c)$, використовуючи схему Горнера, до тих пір

План доповіді

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена n-го степеня з цілими коефіцієнтами, то чисельник p — дільник вільного члена, а знаменник q — дільник старшого коефіцієнта.

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена n-го степеня з цілими коефіцієнтами, то чисельник p — дільник вільного члена, а знаменник q — дільник старшого коефіцієнта.

Доведення

Розглянемо довільний многочлен з цілими коефіцієнтами:

$$f(x) \quad = \quad f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{n-1} x^{n-1} + f_n x^n.$$

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена n-го степеня з цілими коефіцієнтами, то чисельник p — дільник вільного члена, а знаменник q — дільник старшого коефіцієнта.

Доведення

Розглянемо довільний многочлен з цілими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{n-1} x^{n-1} + f_n x^n. \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= f_n \frac{p^n}{q^n} + f_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + f_1 \frac{p}{q} + f_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow f_n p^n + f_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + f_1 p q^{n-1} + f_0 q^n = 0 \end{aligned}$$

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена n-го степеня з цілими коефіцієнтами, то чисельник p — дільник вільного члена, а знаменник q — дільник старшого коефіцієнта.

Доведення

Розглянемо довільний многочлен з цілими коефіцієнтами:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_{n-1} x^{n-1} + f_n x^n. \\
f\left(\frac{p}{q}\right) &= f_n \frac{p^n}{q^n} + f_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + f_1 \frac{p}{q} + f_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow f_n p^n + f_{n-1} p^{n-1} q + \dots + f_1 p q^{n-1} + f_0 q^n = 0 \\
&\Leftrightarrow f_n p^n = -q \left(f_{n-1} p^{n-1} + \dots + f_1 p q^{n-2} + f_0 q^{n-1}\right) \vdots\, q
\end{aligned}
$$

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена n-го степеня з цілими коефіцієнтами, то чисельник p — дільник вільного члена, а знаменник q — дільник старшого коефіцієнта.

Доведення

Розглянемо довільний многочлен з цілими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_{n-1} x^{n-1} + f_n x^n. \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= f_n \frac{p^n}{q^n} + f_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + f_1 \frac{p}{q} + f_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow f_n p^n + f_{n-1} p^{n-1} q + \dots + f_1 p q^{n-1} + f_0 q^n = 0 \\ &\Leftrightarrow f_n p^n = -q \left(f_{n-1} p^{n-1} + \dots + f_1 p q^{n-2} + f_0 q^{n-1}\right) \,\vdots\, q \\ &\Leftrightarrow f_0 q^n = -p \left(f_n p^{n-1} + f_{n-1} p^{n-2} q + \dots + f_1 q^{n-1}\right) \,\vdots\, p. \end{aligned}$$

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена n-го степеня з цілими коефіцієнтами, то чисельник p — дільник вільного члена, а знаменник q — дільник старшого коефіцієнта.

Доведення

Розглянемо довільний многочлен з цілими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{n-1}x^{n-1} + f_n x^n. \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= f_n \frac{p^n}{q^n} + f_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + f_1 \frac{p}{q} + f_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow f_n p^n + f_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + f_1 p q^{n-1} + f_0 q^n = 0 \\ &\Leftrightarrow f_n p^n = -q\left(f_{n-1}p^{n-1} + \cdots + f_1 p q^{n-2} + f_0 q^{n-1}\right) \vdots\, q \\ &\Leftrightarrow f_0 q^n = -p\left(f_n p^{n-1} + f_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + f_1 q^{n-1}\right) \vdots\, p. \end{aligned}$$

Твердження теореми випливає із взаємної простоти p та q

Основа перебору

Доведена теорема дає змогу знаходити всі раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами шляхом перебору скінченної кількості варіантів.

Основа перебору

Доведена теорема дає змогу знаходити всі раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами шляхом перебору скінченної кількості варіантів.

Наслідок

Для многочлена з цілими коефіцієнтами справджуються такі висловлювання:

- цілий корінь — дільник вільного члена;
- раціональний корінь многочлена зі старшим коефіцієнтом 1 — ціле число.

Лема для оптимізації перебору

Лема

Якщо p і q — взаємно прості цілі числа, то для довільного цілого m числа $p + mq$ та q — взаємно прості.

Лема для оптимізації перебору

Лема

Якщо p і q — взаємно прості цілі числа, то для довільного цілого m числа $p + mq$ та q — взаємно прості.

Доведення

Для довільного цілого m з взаємної простоти p і q випливає існування таких цілих a та b, при яких:

$$\text{НСД}(p, q) = 1 = ap + bq = a(p + mq) + (b - am)q = \text{ НСД}(p + mq, q).$$

Лема для оптимізації перебору

Лема

Якщо p і q — взаємно прості цілі числа, то для довільного цілого m числа $p + mq$ та q — взаємно прості.

Доведення

Для довільного цілого m з взаємної простоти p і q випливає існування таких цілих a та b, при яких:

$$\text{НСД}(p, q) = 1 = ap + bq = a(p + mq) + (b - am)q = \text{ НСД}(p + mq, q).$$

З доведеної леми випливає наступна теорема, яка дає змогу значно зменшити об'єм обчислень при визначенні всіх раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами.

Основа оптимізації перебору

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, m — довільне ціле, то $f(m) \vdots (p - mq)$.

Основа оптимізації перебору

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, m — довільне ціле, то $f(m) \vdots (p - mq)$.

Доведення

$$\begin{aligned} f(m) &= f(m) - f(p/g) = \\ &= f_n\left(m^n - \frac{p^n}{q^n}\right) + f_{n-1}\left(m^{n-1} - \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + f_1\left(m - \frac{p}{q}\right), \end{aligned}$$

Основа оптимізації перебору

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, m — довільне ціле, то $f(m) \,\vdots\, (p - mq)$.

Доведення

$$\begin{aligned}
f(m) &= f(m) - f(p/g) = \\
&= f_n\left(m^n - \frac{p^n}{q^n}\right) + f_{n-1}\left(m^{n-1} - \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + f_1\left(m - \frac{p}{q}\right), \\
q^n f(m) &= f_n(m^n q^n - p^n) + f_{n-1}q(m^{n-1}q^{n-1} - p^{n-1}) + \cdots + \\
&+ f_2 q^{n-2}(m^2q^2 - p^2) + f_1 q^{n-1}(mq - p),
\end{aligned}$$

Основа оптимізації перебору

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, m — довільне ціле, то $f(m) \vdots (p - mq)$.

Доведення

$$\begin{aligned}
f(m) &= f(m) - f(p/g) = \\
&= f_n\left(m^n - \frac{p^n}{q^n}\right) + f_{n-1}\left(m^{n-1} - \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + f_1\left(m - \frac{p}{q}\right), \\
q^n f(m) &= f_n(m^n q^n - p^n) + f_{n-1}q(m^{n-1}q^{n-1} - p^{n-1}) + \cdots + \\
&+ f_2 q^{n-2}(m^2q^2 - p^2) + f_1 q^{n-1}(mq - p),
\end{aligned}$$

що кратне $mq - p$, бо існує такий розклад на множники:

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Основа оптимізації перебору

Теорема

Якщо нескоротний дріб p/q — корінь многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, m — довільне ціле, то $f(m) \vdots (p - mq)$.

Доведення

$$\begin{aligned} f(m) &= f(m) - f(p/g) \ = \\ &= f_n\left(m^n - \frac{p^n}{q^n}\right) + f_{n-1}\left(m^{n-1} - \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \dots + f_1\left(m - \frac{p}{q}\right), \\ q^n f(m) &= f_n(m^n q^n - p^n) + f_{n-1} q (m^{n-1} q^{n-1} - p^{n-1}) + \dots + \\ &+ f_2 q^{n-2}(m^2 q^2 - p^2) + f_1 q^{n-1}(mq - p), \end{aligned}$$

що кратне $mq - p$, бо існує такий розклад на множники:

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2} b + \dots + a b^{k-2} + b^{k-1}).$$

Твердження теореми випливає з доведеної леми про взаємну простоту q і $p - mq$.

Приклад розв'язання рівняння

Задача

Знайти x, якщо $12x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 41x - 10 = 0.$

Приклад розв'язання рівняння

Задача

Знайти x, якщо $12x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 41x - 10 = 0$.

Розв'язання

Позначимо ліву частину рівняння через $f(x)$.

$\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ — множина всіх натуральних дільників вільного члена $f(x)$;

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ — множина всіх натуральних дільників старшого коефіцієнта $f(x)$.

Приклад розв’язання рівняння

Задача

Знайти x, якщо $12x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 41x - 10 = 0.$

Розв’язання

Позначимо ліву частину рівняння через $f(x)$.

$\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ — множина всіх натуральних дільників вільного члена $f(x)$;

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ — множина всіх натуральних дільників старшого коефіцієнта $f(x)$.

Раціональні корені рівняння будемо шукати серед дробів:

$$
\begin{array}{llll}
\pm 1, & \pm 2, & \pm 5, & \pm 10, \\
\pm 1/2, & & \pm 5/2, & \\
\pm 1/3, & \pm 2/3, & \pm 5/3, & \pm 10/3, \\
\pm 1/4, & & \pm 5/4, & \\
\pm 1/6, & & \pm 5/6, & \\
\pm 1/12 & & \pm 5/12. &
\end{array}
$$

Приклад розв'язання рівняння (продовження 1)

Розв'язання

Обчислимо $f(1)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
1	12	4	-37	4	-6

Приклад розв'язання рівняння (продовження 1)

Розв'язання

Обчислимо $f(1)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
1	12	4	-37	4	-6

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $(p-q)$ — дільник $f(1) = -6$, тобто одне з чисел ±1, ±2, ±3, ±6.

Приклад розв'язання рівняння (продовження 1)

Розв'язання

Обчислимо $f(1)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
1	12	4	-37	4	-6

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $(p-q)$ — дільник $f(1) = -6$, тобто одне з чисел ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.
Звузимо множину можливих раціональних коренів:

Приклад розв'язання рівняння (продовження 1)

Розв'язання

Обчислимо $f(1)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
1	12	4	-37	4	-6

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $(p-q)$ — дільник $f(1) = -6$, тобто одне з чисел ±1, ±2, ±3, ±6.
Звузимо множину можливих раціональних коренів:

$$\left\{\begin{array}{llll} \pm1, & \pm2, & \pm5, & \pm10, \\ \pm1/2, & & \pm5/2, & \\ \pm1/3, & \pm2/3, & \pm5/3, & \pm10/3 \\ \pm1/4, & & \pm5/4, & \\ \pm1/6, & & \pm5/6, & \\ \pm1/12 & & \pm5/12, & \end{array}\right\}$$

Приклад розв'язання рівняння (продовження 1)

Розв'язання

Обчислимо $f(1)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
1	12	4	-37	4	-6

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $(p-q)$ — дільник $f(1) = -6$, тобто одне з чисел ±1, ±2, ±3, ±6.
Звузимо множину можливих раціональних коренів:

$$\left\{\begin{array}{llll} \pm1, & \pm2, & \pm5, & \pm10, \\ \pm1/2, & & \pm5/2, & \\ \pm1/3, & \pm2/3, & \pm5/3, & \pm10/3 \\ \pm1/4, & & \pm5/4, & \\ \pm1/6, & & \pm5/6, & \\ \pm1/12 & & \pm5/12, & \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{lll} -1, & \pm2, & -5, \\ \pm1/2, & & +5/2, \\ +1/3, & +2/3, & +5/3, \\ +1/4, & & +5/4, \\ & & +5/6 \\ & & \end{array}\right\}$$

Приклад розв'язання рівняння (продовження 2)

Розв'язання

Обчислимо $f(-1)$ за допомогою схеми Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
-1	12	-20	-21	62	-72

Приклад розв'язання рівняння (продовження 2)

Розв'язання

Обчислимо $f(-1)$ за допомогою схеми Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
-1	12	-20	-21	62	-72

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння,
$(p - (-1) \cdot q) = (p + q)$ — дільник $f(-1) = -72$.

Приклад розв'язання рівняння (продовження 2)

Розв'язання

Обчислимо $f(-1)$ за допомогою схеми Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
-1	12	-20	-21	62	-72

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння,
$(p-(-1)\cdot q)=(p+q)$ — дільник $f(-1)=-72$.
Для чисел з набору:

$$\begin{array}{lll} -1, & \pm 2, & -5, \\ \pm 1/2, & & +5/2, \\ +1/3, & +2/3, & +5/3, \\ +1/4, & & +5/4, \\ & & +5/6 \end{array}$$

умова: $72 \vdots (p+q)$ — справджується лише для таких чисел:

Приклад розв'язання рівняння (продовження 2)

Розв'язання

Обчислимо $f(-1)$ за допомогою схеми Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
-1	12	-20	-21	62	-72

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $(p - (-1) \cdot q) = (p + q)$ — дільник $f(-1) = -72$.
Для чисел з набору:

$$\begin{array}{lll} -1, & \pm 2, & -5, \\ \pm 1/2, & & +5/2, \\ +1/3, & +2/3, & +5/3, \\ +1/4, & & +5/4, \\ & & +5/6 \end{array}$$

умова: $72 \vdots (p+q)$ — справджується лише для таких чисел:

$$\pm 1/2,\ 1/3,\ \pm 2,\ -5,\ 5/3,\ 5/4.$$

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
2	12	16	-9	23	36

.

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
2	12	16	-9	23	36

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $36 \,\vdots\, (p-2q)$.

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
2	12	16	-9	23	36

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $36 \,\vdots\, (p-2q)$.
З раніше виділених чисел: $\pm 1/2$, $1/3$, ± 2, -5, $5/3$, $5/4$ — цю умову задовольняють лише такі числа: .

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
2	12	16	-9	23	36

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $36 \vdots (p-2q)$.
З раніше виділених чисел: $\pm 1/2$, $1/3$, ± 2, -5, $5/3$, $5/4$ — цю умову задовольняють лише такі числа: $1/2$, -2, $5/3$, $5/4$.

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
2	12	16	-9	23	36

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $36 \vdots (p-2q)$.
З раніше виділених чисел: $\pm 1/2$, $1/3$, ± 2, -5, $5/3$, $5/4$ — цю умову задовольняють лише такі числа: $1/2$, -2, $5/3$, $5/4$.
Використовуючи схему Горнера, поділимо $f(x)$ на $(x-1/2)$.

	12	-8	-41	41	-10
$1/2$	12	-2	-42	20	0
$1/2$	12	4	-40	0	
$1/2$	12	10	-35		

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
2	12	16	-9	23	36

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $36 \vdots (p-2q)$.
З раніше виділених чисел: $\pm 1/2$, $1/3$, ± 2, -5, $5/3$, $5/4$ — цю умову задовольняють лише такі числа: $1/2$, -2, $5/3$, $5/4$.
Використовуючи схему Горнера, поділимо $f(x)$ на $(x - 1/2)$.

	12	-8	-41	41	-10
$1/2$	12	-2	-42	20	0
$1/2$	12	4	-40	0	
$1/2$	12	10	-35		

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^3 - 2x^2 - 42x - 20)$$

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	-8	-41	41	-10
2	12	16	-9	23	36

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $36 \vdots (p-2q)$.
З раніше виділених чисел: $\pm 1/2$, $1/3$, ± 2, -5, $5/3$, $5/4$ — цю умову задовольняють лише такі числа: $1/2$, -2, $5/3$, $5/4$.
Використовуючи схему Горнера, поділимо $f(x)$ на $(x - 1/2)$.

	12	-8	-41	41	-10
$1/2$	12	-2	-42	20	0
$1/2$	12	4	-40	0	
$1/2$	12	10	-35		

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^3 - 2x^2 - 42x - 20) = \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (12x^2 + 4x - 40) \end{aligned}$$

Розв'язання

Обчислимо $f(2)$, використовуючи схему Горнера.

	12	−8	−41	41	−10
2	12	16	−9	23	36

Для нескоротного дробу p/q, що є коренем рівняння, $36 \vdots (p-2q)$.
З раніше виділених чисел: $\pm 1/2$, $1/3$, ± 2, -5, $5/3$, $5/4$ — цю умову задовольняють лише такі числа: $1/2$, -2, $5/3$, $5/4$.
Використовуючи схему Горнера, поділимо $f(x)$ на $(x-1/2)$.

	12	−8	−41	41	−10
1/2	12	−2	−42	20	0
1/2	12	4	−40	0	
1/2	12	10	−35		

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(12x^3-2x^2-42x-20) = \\
&= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2(12x^2+4x-40) = (2x-1)^2(3x^2+x-10).
\end{aligned}
$$

Приклад розв'язання рівняння (завершення)

Розв'язання

Поділимо $(3x^2 + x - 10)$ на $(x + 2)$ за допомогою схеми Горнера:

	3	1	-10
-2	3	-5	0

.

Приклад розв'язання рівняння (завершення)

Розв'язання

Поділимо $(3x^2 + x - 10)$ на $(x + 2)$ за допомогою схеми Горнера:

	3	1	-10
-2	3	-5	0

.

У результаті маємо розклад: $f(x) = (2x - 1)^2(x + 2)(3x - 5)$.

Приклад розв'язання рівняння (завершення)

Розв'язання

Поділимо $(3x^2 + x - 10)$ на $(x + 2)$ за допомогою схеми Горнера:

	3	1	-10
-2	3	-5	0

.

У результаті маємо розклад: $f(x) = (2x - 1)^2(x + 2)(3x - 5)$.

Відповідь. -2, $3/5$, $1/2$ (останній корінь має кратність 2).

Приклад розв'язання рівняння (завершення)

Розв'язання

Поділимо $(3x^2 + x - 10)$ на $(x + 2)$ за допомогою схеми Горнера:

	3	1	-10
-2	3	-5	0

.

У результаті маємо розклад: $f(x) = (2x - 1)^2(x + 2)(3x - 5)$.

Відповідь. -2, $3/5$, $1/2$ (останній корінь має кратність 2).

Зауваження

Якби многочлен $(x - 1/2)$ не виявився дільником $f(x)$, то ділили б $f(x)$ по черзі на $(x + 2)$, $(x - 5/3)$, $(x - 5/4)$.